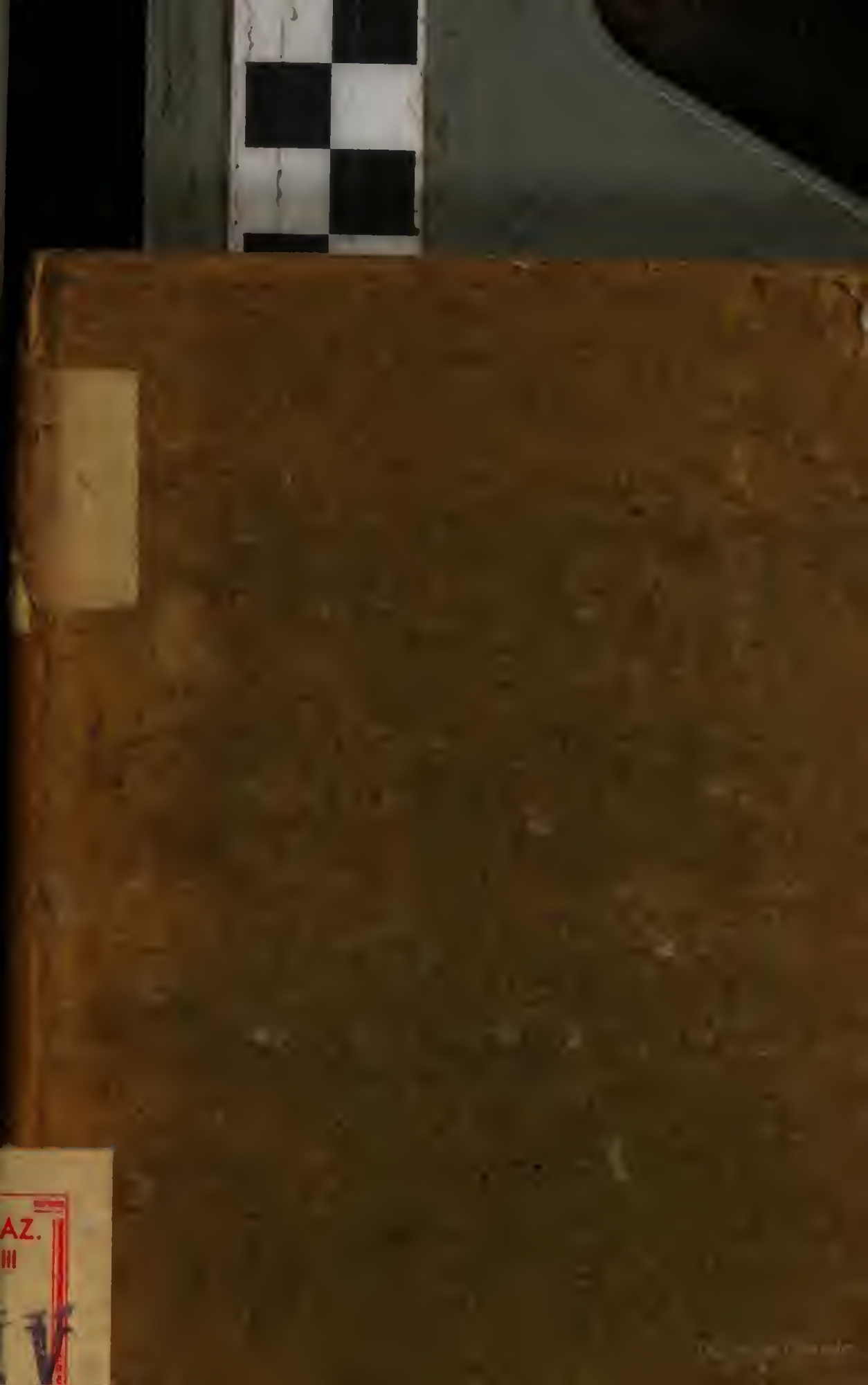
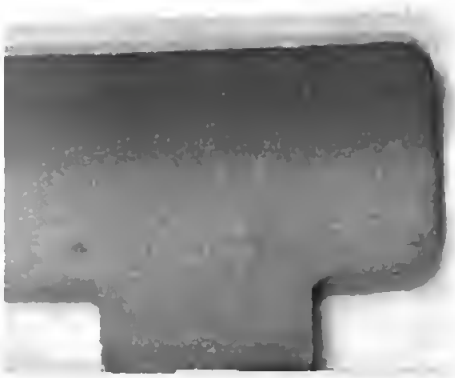


BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XX XIV
B
55
NAPOLI



Digitized by Google

Räsonnements

über

wichtige Anwendungen

der Algeber

in

Geometrie und Trigonometrie.

Von

Chr. Ludw. Schübler,

Mitglied des innern Raths zu Heilbronn.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

— — Etiam oblivisci interdum, quid sis, expedit!

Sen.

Frankfurt und Leipzig,

in der Grattenauerischen Buchhandlung.

1788.

Vorrede.

Ich bin des Glaubens, daß kein Frommen noch Gedeihen seie, wenn man sich in Mathematik schlechterdings nur an ein einziges Lehrbuch hält. Wenn es auch gut und und gründlich gearbeitet ist, so ist es doch nur das Product eines Menschen, dessen Vorstellungsart auch bei groser Mannichfaltigkeit die Vorstellungsarten anderer über gleiche und ähnliche Gegenstände des wissenschaftlichen Nachdenkens nicht ausschliesen, noch überflüssig machen kann. . . Ich bin weiter des Glaubens, daß Dilettanten in

Mathematik viel glücklicher im Studium des einen oder andern Fachs dieser Scienz fortrücken würden, wenn sie bei einem jeden wichtigen Theorem, welches das Compendium, das sie etwa besizen, ihnen in einem kurzen mit Allegaten erfüllten Paragraphen in gedrängtem Ausdruck beweißt, irgend ein Räsonnement kennten, in welchem ihnen ein aufrichtiger Mann geradehin erzälte: „An dem und jenem Saz bin ich „auch wol manche halbe Stunde gesessen, „und habe nachgesonnen, und mich mit dem „oder jenem Misverständnis oft lange ge„tragen, und da ist mirs endlich auf folgen„dem Weg licht worden.“

Ich bin weiter des Glaubens, daß ein Räsonnement solcher Art noch interessanter würde, wenn der gedachte Erzäler öfters auch beisezte: „Die oder jene scharfe Erin„rung da, und die feine Wendung dort.. „hat mich sonderlich gefreut, und auf die „schwere Entwicklung hat sich mir eine vor„züg-

„züglich weite Aussicht eröfnet.“ Ferner aber bin ich nicht nur des Glaubens, sondern der vollkommenen Ueberzeugung, daß wir (in Deutschland wenigstens) noch kein auf den angedeuteten Schlag hin ausgearbeitetes Werk besizen, und daß — das eben nichts erfreuliches sei. —

Diese Lücke durch mein Werkchen da (von 10 Bogen) auszufüllen, . . . ich müßte mit sehr viel präsumtuosem Eigendünkel behaftet seyn, wenn ich mich mit dem Gedanken nur zwo Minuten lang tragen könnte.

Zur Production eines solchen Werks gehören, meines Erachtens, grose Requisiten. . . . Ich will nicht umständlich davon reden; Auch viel Zeit und Muse gehört dazu. — — Genug, in meiner Lage kann ich nichts, als: auf wenigen Blättern Bruchstücke liefern, welche dem berührten Plan nur ohngefär anpassen, nichts als Versuche anstellen, den Sinn für Mathematik hie und da, wo möglich zu wecken, nichts

als gewagte Winke geben, wo, nach meinem Bedünken, etwa der Geiſt Gebers dem Geiſt der Philoſophie begegnet, und wo ihre Zuſammenkunft aufmerkſamer beobachtet werden ſollte, als unſre Denker bisher zu beobachten für bequem gefunden haben, — nichts, als ausgeſuchte Beiſpiele detailliren, woraus helle werden möge, wie ſehr es von Ideen-Beſchränktheit zeuge, wenn man Algeber von Geometrie ausſchlieſen ſich beigehen läst. — —

Meine Blätter beginnen mit Betrachtungen über zwei Segmente eines Diameters und einen darauf errichteten Perpendikel; (§. 1 — §. 3) und ſchlieſen ſich auch damit §. 10 — §. 15, nur daß dieſe Linien bald im Verfolg trigonometriſch, als 1 — Cos, als 1 + Cos, und als der Sinus ſelbſt, erwogen werden.

Von §. 3 — 9 kommen Vergleichungen des VI Ecks, des III Ecks, des IV, des VIII, des XII, des X, des V Ecks mit dem Radius, vor. Lieb-

Liebhaber der Mathematik erhalten hiedurch einen Commentar zu zwei Blättern der Käſtneriſchen Algeber, in welchen äuſſerſt concentrirt ſehr viel ſteht; ich meine §. 153—62 der Analyſ. endl. Gröſen die in den Händen eines jeden Freundes von mathematiſcher Evidenz ohne Ausname ſeyn ſollten. — — Ich fühle hiebei einige Verſuchung, von meinen eigenen Evolutionen, beim VIII Eck, beim V und beim XII Eck, zu ſprechen; Durch die leztere iſt S. 72 auch eine einzelne mir ehedem ſehr beſchwerliche Stelle der Käſtneriſchen Geom. (Saz. 43) erläutert, wie überhaupt die Auflöſung, welche unter dieſem Saz 43, vorkommt, durch meine (wie ich hoffe) nicht überflüſſige Bemerkungen in §. 6. (S. 58 bis 66) beleuchtet. Auch denke ich etwas zur Aufhellung des 20 Sazes der Käſtn. Trigon. durch §. 13—15 beigetragen zu haben. In dem Beweis über den Sinus der Summe §. 12. bin ich der Vorſtellung des Hrn. Prof. Bürjas gefolgt. —

Zur

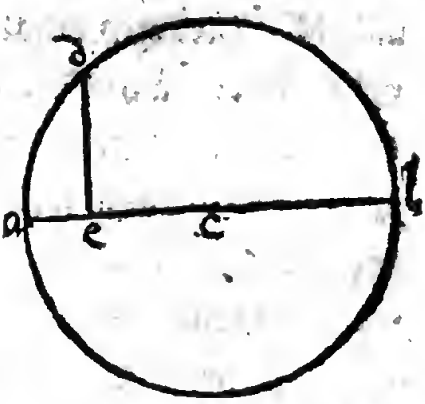
Zur Lectüre dieser Blätter seze ich übrigens die ersten Anfgrde der Geometr., der Buchstaben Rechnung, u. des Decim. Calküls voraus, auch Bekanntschaft mit den Signaturen, die allerwärts genug erklärt stehen. Zum Ueberfluß sei die Bedeutung von einigen hiemit noch beigesezt:

Das Zeichen der Gleichheit ist = = = = =
Das = = der Aehnlichkeit ist = = = = ∽
Das = = des Quadr., z. B. r^2, auch r^q
Ein Binomium in der 2ten Potenz, z. B. $(a-b)^2$ ist so viel als a^2-b^2, auch: $\overline{a-b}^2$
Eben dieser Strich deutet an, wie weithin ein Wurzel-Zeichen die Grösen afficire, z. B. $\sqrt{4r^2-Z^2}$ ist $= \sqrt{(4r^2-Z^2)}$.

Noch ein Wort von den geometr. Figuren! Ich wünschte, daß meine Leser, sich die Mühe gäben, besonders die leztern, für sich heraus zuzeichnen, und ins Grösere zu entwerfen. Namentlich erinnre ich dieß bei Fig. 12. S. 110. Der 11te §., zumal das Räsonnem. dazu, S. 115, leuchtet gewiß erst vollkommen ein, wenn man eine grose Zeichnung macht, den Radius ac, mit Pünktchen, (als gleichartigen Theilchen) markirt, und diese dann auf ad überträgt; wie auch, wenn man den Perpend. de, bald näher dem Centrum zurückt, bald mehr davon entfernt, um die Gleichh. des Cosin, und des Sin. Vers. zu vermeiden.

§. 1.

Auf jeden Diameter lassen sich unzälige Perpendikel errichtet denken, welche bis an den Halb-Kreis reichen, oder in denselben an einem Punct einschneiden. Ein jeder solcher Perpendikel läst sich zugleich als einen Theiler ansehen, der eine gerade Linie, (eben den Diameter,) in zwei Stücke sondert, zumal wenn er weiter abwärts fort-gezogen wird. Ein Ganzes zerfällt dadurch in zwei Fragmente, die zwo verschiedene Grösen vorstellen, für die Anschauung von verschiedener (d. h. hier blos protensiv-ungleicher) Länge, ae, und el.



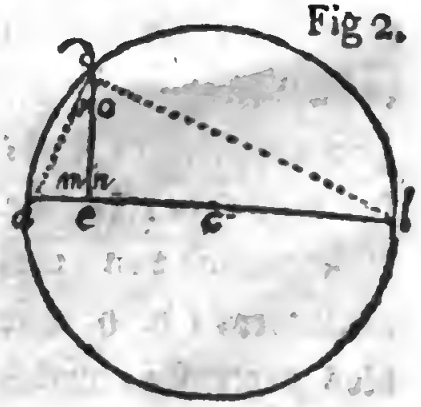
Als Grösen stehen

dieſelben in einem gewiſſen Verhältniß, es mag ſeyn, welches es wolle, (wie allerwärts zwo gegebene Zal-Grösen, ſie mögen ſich ſo ſchwer vergleichen laſſen, als ſie wollen.) Die Erkenntnis dieſes Verhältniſſes vermittelt in unſerem Fall hier jedesmal der aufgerichtete Perpendikel, de, indem er die Eigenſchaft hat, daß er durchaus, er ſtehe, wo er wolle, auf dem Diameter, die mittlere Proportional-Linie zwiſchen den zwo (durch ſeine Zerfälluug ſelbſt entſtandenen) ungleichen Linien ae, und el iſt, und demnächſt jede derſelben als 4tes Glied einer zuſammenhängenden geometr. Proportion darſtellt: ae : de = de : el,

oder el : de = de : ae.

Der Beweis dieſes wichtigen Sazes wird kurz ſo geführt: Man zieht zwo Hülfs-Linien nach d von beeden Enden des Diameters aus, ad und ld. Hiedurch erhält man zwei ähnliche rechtwinklichte Dreiecke, ade, und edl, und wenn der Perpendikel gar hinweg gedacht wird, ein groſes rechtwinkl. Drei-

Fig 2.



*) Ueber den Misverſtand des Ausdrucks: Verhältnis ſtehen ſehr feine Bemerkungen in Hrn. Prof. Büſch mathem. Encykl. §. 21.

eck, adl, welches die zwei kleinern befaßt, und welchem sie beede ebenfalls ähnlich sind. Denn es ist leicht einzusehen, daß das △ ade drei gleiche Winkel mit dem grosen △ adl habe; Durch den Perpendikel ist 1) ja der ⌞ in n ein rechter, so wie oben an der Peripherie d oder (r + o) ebenfalls ein rechter Winkel *) vorkommt; also n = d.

2) Der Winkel bei a ist beeden Dreiecken gemein, also natürlich in beeden gleich, a = a.

3) Der Winkel bei r mus also vollends auch dem bei l gleich seyn, weil nichts übrig bleibt, um das Maas von 180° = 2R voll zu machen, also gar keine verschiedene Gröse weiters denkbar ist. Wozu noch kommt, daß auch eine Seite, nehmlich ad, beeden

*) Jeder Winkel an der Peripherie hat (in dem Cirkel) die Helfte des Bogens, auf dem er steht, zu seinem Maas. Das ist in allen Anfangsgr. der Geom. erwiesen. Unser ⌞ hier aber nimmt zum Bogen die Helfte des Kreises selbst ein, d. h. das sonstige Maas zweier Rechten. Die Helfte davon (von 2 R.) ist = R. Also ist der Winkel in d = R.

Drelecken gemein, oder in beeden zugleich vorhanden ist; als wodurch vollends die Aehnlichkeit dieser 2 △△ gewiß ausser allen Zweifel gesezt wird.

Eben so ist das andere △ edl aus gleichen Gründen diesem grosen △ adl ähnlich. Denn es hat ja mit dessen drei Winkel, m, l und o eben die angeführte Beschaffenheit;

m = d, als rechter, (ad perpend.)
l = l, als beeden Dr. gemein,
o = a, als gleiche Reste zu 2 R;

und überdem ist die Seite, dl, beeden gemeinschaftlich, = dl, beederseits.

Demnach ist zuverlässig das grosse △, adl, gegen die zwei kleinere, die es befaßt, in anschaulichem Verhältnis der Aehnlichkeit. Folglich müssen diese zwei kleinere auch selbst unter sich ähnlich seyn, d. h. jedes muß einen Winkel enthalten, der sich auch im andern vorfindet, und ihre den gleichen Winkel entgegenstehende, (oder homologe) Seiten-Linien müssen einander proporzionirt seyn. Und so ist es auch! ade △ edl,

weil

weil die Winkel n, r, a, = m, l, o, ſind. Dann es ſind

n = m, als rechte; (ad perpend.)
r = l, (aus dem erſten Beweis her, wo in nr. 3. ſich r nothwendig l gleich zeigte;
a = o, als nothwendig gleiche Reſte;

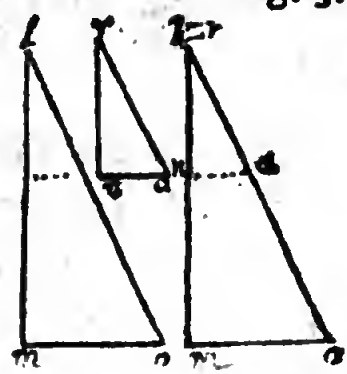
und auch hier abermals eine ganz-gleiche Seite, de, weil ſie gemeinſchaftlich iſt, d. h. in beeden Dreiecken, de = de.

Jezt aber kann es nicht mehr fehlen, alle drei Seiten, welche ſich in dieſen zwei Dreiecken ade, und edl correſpondiren, ſo fort zu erkennen. Natürlich iſt die Seite

ad homolog mit dl, (als Hypotenuſe,)
ae homolog mit de, (als Baſis im Dreieck ade, wie de Baſis im △ edl iſt,)
de homolog mit el, (Kathetus gegen Kathetus,)

wo allemal den homologen Seiten evident Winkel gegen-über liegen, welche erwieſener-maaſen einander gleich ſind. Wenn man die zwei

Fig. 3.



Dreiecke ausgesezt neben einander stellt, wie hier, und sodann auch den kleinen ade in den grösern hinein versezt, so wird alles bisher vorgetragene noch einleuchtender; zumal wenn man die Vermischung der Buchstaben vermeidet, und hier dazu bemerkt, daß sich r auf die Spize des kleinen Dreiecks, l aber auf die des grösern, welche übrigens coincidiren, beziehe. Dann da verhält sich doch sicher Basis gegen Basis, (na : mo) welche paralel laufen, wie der kleinere Kathetus zum grösern, (rn : lm),

na : mo = rn : lm;

Die Basis im grösern △ mo, ist aber dem Kathetus im kleinern △ rn, ganz gleich, mo = rn, obiger Construction Fig. 2. gemäs, wo offenbar nur eine Linie, eben der Perpendikel, de, der beeden Dreiecken gemein ist, in Zeichnung vorkam; Also lassen sich offenbar diese Aequivalente substituiren, und sezen:

na : mo = rn : lm
na : rn = rn : lm
na : mo = mo : lm
na : de = de : lm

und, da der Augenſchein giebt, daß na eben die Linie iſt, die oben ae hies, und lm die, welche el hies, ſo iſt die Proportion erwieſen: ae : de = de : el; das heist:

Der Perpendikel, de, iſt wirklich die mittlere Proportional-Gröſe zu den zwei Segmenten des Diameters ae, und el.

Sezen wir jezt algebraiſch den

Diameter, al = M
das vordre Segment deſſelben, ae = b
den Perpendikel, aber de = y

ſo läst ſich leichterachtlich das 2te Segment des Diameters, el, auch als M — b ausdrücken, und alſo die obige Proportion nun ſo denken:

ae : de = de : el
b : y = y : M—b

Da aber, nach bekannten Säzen, in jeder geometriſchen Proportion das Product der mittlern Gliedern dem der zwei äuſſern gleich iſt,

so fliest hieraus die Gleichung: $y.y = b.(M-b)$
od. welches im Ausdruck eben
so viel besagt $y^2 = Mb - bb$
wo dann die Gröse des Perpendikels, als quadrirt, erscheint, und demnächst zum Aequivalent nicht weniger, als selbst den Betrag *) eines im Ganzen gleich vielbedeutenden Quadrats haben.

---

*) Dieses Aequivalent ist jedesmal (graphisch-betrachtet,) ein Rectangel, oder ein länglichtes Viereck, den einzigen Fall ausgenommen, wenn der Perpendikel auf dem Centrum selbst aufsteht, d. h. so gros, als der Halb-Messer selbst ist. Die Ungleichheit zweier Seiten, (da nur die zwei entgegenstehende congruent sind,) verhindert ja das Zusammen-Treffen im Flächen-Gehalt, im Ganzen betrachtet, nie. . . . . Die Auflösung der Aufgabe aber, jedes Rectangel in ein reines Quadrat zu reduciren, gründet sich, wie man bald sieht, eben auf die Einsicht der obengesetzten zusammen-hängenden Proportion; Die zwei Segmente des Diameters rechtwinklicht zusammen geordnet, und dann zweimal in Contra-Opposition gezeichnet, stellen eben das für die Anschauung dar, was der rechnende Verstand als ein Product zweier (verschiedener) durch einander multiplicirter Zal-Grösen erkennt,

haben kann, wofür wir alſo $Mb - b^2$ gelten laſſen müſſen Wo aber zwo gleiche Quadrat-Gröſen ſind, da ſind auch bekanntlich zwo gleiche Quadrat-Wurzeln; welches dann den Ausdruck veranlaßt.

$\sqrt{(y)^2} = \sqrt{(Mb - bb)}$

d. h. $y = \sqrt{(Mb - b^2)} = \sqrt{(b.M - b)}$, oder, wenn man ſtatt M—b eine ſimple Signatur, etwa z, annehmen mag, $y = \sqrt{bz}$.

Nähere Entwicklungen gehören noch nicht hierher; Genug wir wiſſen nun, wie wir jeden Perpendikel, den wir auf einem Durchmeſſer wahrnehmen, anzuſehen haben, und in welcher Beziehung derſelbe, quantitativ erwogen, als mittl. Proportional-Gröſe, und als Quadrat-Wurzel, (als latus quadrati,) rechtlich zu achten ſei.

und als Gleichung zu y^2 nothwendig annehmen mus. — Die ſehr practiſche Lehre von der Verwandlung aller gerad-linichten Figuren in Quadrate beruht faſt blos auf der Anwendung dieſer Säze, und deren Verfolg. Mehr hierüber zu commentiren führte mich aber in dieſen Blättern zu weit von meinem Zweck.

§. 2.

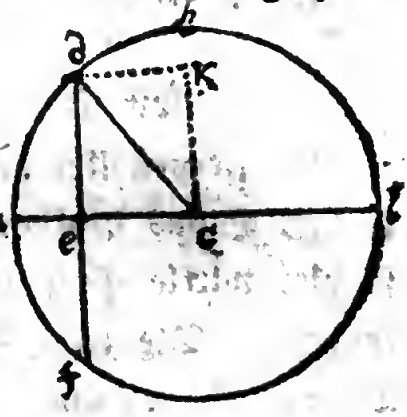
Eben dieſer Perpendikel kann aber auch jedesmal als die Helfte einer Sehne, (chorda dimidiata,) betrachtet werden. Denn ſeine Verlängerung, gerade aus-fort gedacht, bis er den andern Halb-Kreis erreicht, läst ſich gar von dem Gedanken der Erzeugung einer Sehne nicht abſondern, in ſo ferne ſie, rechtwinklicht getheilt, vorgeſtellt werden mag. Man verſuche es, ob eine andre Conſtruction nur möglich zu fingiren iſt. Man wird allemal darauf hinaus kommen: Wenn ſie der Diameter halbirt, ſo laſſen ſich ihre zwei Helften als zwei entgegenſtehende Perpendikel betrachten; und, wenn dieſe ſo gegen einander ſtehen, (von den beeden entgegengeſezten Halb-Cirkeln aus, gerade auf einander laufend,) ſo iſt die Linie, die ſie recht-winklicht ſchneidet, keine andre, als der Diameter ſelbſt.

Hierdurch werden wir unmittelbar auf das, was Sinus in Trigonometrie heist, geleitet. Unſer bisher ſo vielfältig-erwogener Perpendikel, de, iſt eben ein Sinus, nur daß man

in

in der obigen Fig. 2. zwiſchen d und c hin, einen Rad. (dc = ac,) und alſo den dadurch beſtimmten Bogen, ad' immer dazu gedenke. Intuitiv erhellet, daß also da 2. gleiche Schenkel ſeien, und von dem Ende des einen eine Linie ſenkrecht auf eine gewiſſe Stelle des andern Schenkels falle. Und ſo iſt es jedesmal, wenn von einem Sinus nur die Rede ſeyn mag! Nur liegt die lezt-gedachte Stelle näher gegen a zu, wenn der Bogen ad weniger gros, d. h. wenn der Winkel in c ſpiziger iſt; folglich iſt auch da der Perpendikel, de, allemal kürzer; und er wird immer kürzer, je näher die Stelle, wo er auffällt, gegen a zu liegt; dagegen, wenn der Bogen gröſer gedacht wird, iſt die Stelle, wo der Perpendikel aufſtehen wird, nothwendig (von c rechts hin) näher an c, und immer näher, so wie der Bogen wächst; alſo wird auch der Perpendikel gröſer und immer gröſer, d. h. die Sinus nehmen zu, bis

Fig. 4.



der

der gröſte gerade über c ſteht, wo er zu einem Radius ſelbſt wird, und Sinus totus heist.

Von ſelbſt fliest aus dieſem allen, daß, ſo viel Perpendikel auf dem Diameter, eben ſo viel Sinus denkbar ſeien, welche alſo eben ſo viel mittle Proportional-Linien vorſtellen können. Die zwei Segmente des getrennten Diameters, ae, und el, erhalten aber beſtimmte techniſche Ausdrücke, welche forthin anhaltend vorkommen werden.

Das erſte, ae, heist der Sinus verſus, oder Quer-Sinus.

Das zweite aber el wird ſynthetiſch gedacht, als ec + cl, und ausgedrückt: coſin + rad., oder als die Summe, die aus dem Coſinus und Radius beſteht. Der Coſinus (auch Sin. complementi) nimmt allemal den Reſt des Bogens ein, der über dem Scheitel-Punct von c, oder von k ſich endiget, um 90 Grade zu ergänzen.

Nur der Zeichen-Ausdruck iſt daher verſchieden, wenn die Proportions-Formel, ae : de = de : el uns jezt ſo viel heist:

Der

Der Sinus ist
die Mittel-Proportionale
zwischen dem Sinus-Versus, und der Summe des Cosinus u. Radius; S. V: Sin = Sin : (Cos + r),
Also $(Sin.)^2$ = S. V. (Cos. + r)
und Sin. = $\sqrt{}$ S. V. (Cos. + r)
Wenn man aber des Quer-Sinus gar nicht erwähnen will, so läst sich, da er, als ae = ac — ec, d. i. als r — cos, der vierten Figur gemäs, erscheint, für ihn auch sezen: Die Differenz des Radius und Cosinus; Demnach aber die obige Proportions-Formel auch so ausdrücken:

Der Sinus ist
die Mittel-Proportionale
zwischen der Differenz des Radius und Cosinus (r — cos), und der Summe des Radius und Cosinus (r + cos). Oder noch kürzer: die mittl. Proport. zwischen der Differenz und Summe des Radius und Cosinus; wo für ae : de = de : el dann gesezt würde: r — cos : Sin. = Sin. : r + cos.

Das Product der mittlern und äusern Glieder gäbe da:

Sin

$(\text{Sin})^2 = r - \cos. \; r + \cos. = r^2 - \cos^2$ *)

also $\text{Sin} = \sqrt{(r^2 - \cos^2)}$;

wofür aber, da für den Radius immer 1 gesezt zu werden pflegt, auch wenn er in höhern Potenzen, r^2, r^3 u. s. f. in Rechnung vorkommt, der Ausdruck gewöhnlicher ist:

$(\text{Sin})^2$ oder Sin. qu. $= 1 - \cos^2$; also

$\text{Sin.} = \sqrt{(1 - \cos^2)}$

Durch eine sehr leichte Umdrehung erwächst hieraus die Formel: $\text{Sin}^2 + \cos^2 = 1$, wo eben dieses 1 ein Quadrat, $= r^2$ vorstellt.

Eben so leicht fliest hieraus die Formel für das Quadrat des Cosinus: $1 - \text{Sin}^2 = \cos^2$; auch $r^2 - \text{Sin}^2$. Folglich für den Cosinus (unquadrirt): $\text{cosin} = \sqrt{(1 - \text{Sin}^2)}$ oder $\sqrt{(r^2 - \text{Sin}^2)}$; wovon aber das nähere weiter unten vorkommen wird.

Rä-

---

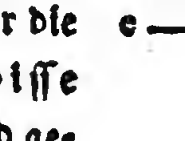
*) Wenn die Mltcation wirklich vorgenommen wird, so erhält man in dem ganz-ausgesezten Product ein positives (r. cos) und ein negatives, welche sich natürlich dann heben, so daß die obige Gröse bleibt. Nehmlich,

$r^2 + (r. \cos) - (r. \cos) - \cos^2$ ist $= r^2 - \cos^2$.

Räsonnement

zu §. 1 und 2.

Es verdient wol einiges Nachdenken, wie weit etwa blos öftere Ansicht den Menschen auf die Ueberzeugung führen konnte, daß jeder Perpendikel oder Sinus die zutreffende Mittel-Proportionale zwischen den zwei Theilen eines gegebenen Kreis-Durchmessers, die wir nun hinlänglich kennen, sei? Es ist möglich, daß der erste Versuch mittl. Prop. Linien zu finden, angestellt wurde, ohne sogleich eine Kreis-Zeichnung zu Hülfe zu rufen, und ohne an einen Diameter zu denken. Die mittl. Prop. Linie ist ja schon zwischen zwo simpeln Linien, ac und cl vorhanden, wenn eine dritte dc dazwischen hineingedacht wird, welche über die kleine um eine gewisse Länge hervorragt, und gegen die gröfere, cl, um eine gewisse Länge zurücksteht.



Es kan mancher diese mittlere so lange abgekürzt, und wieder verlängert haben, bis es ihm glückte, ihr gehöriges Maas zu weiterem Gebrauch zu finden. Aber dieser

empy-

empyrische Weg ist wohl sehr unsicher und mühseelig zugleich. Wer Muse hat, mag Versuche desfalls anstellen! — Wir haben den Kreis, und sehen, wie leicht er die Gröse der Mittelproportionale angibt und mit welcher Schärfe er sie bestimmt. Schon lange vor Euklides Zeiten kante man die hiebei vorschlagende Vortheile. Aber auch dabei läst sich fragen: wie weit bringt wol blos wiederholte Anschauung, und etwa von andern Anlässen her geübtes Augenmaas Vermuthung — Glauben — oder gewisse Einsicht von den Bestimmungen des Perpendikels zur mittlern prop. Gröse, oder von der Eigenschaft eines jeden Sinus, diese Gröse darzustellen, hervor? . . . . Es ist ein demüthigender Gedanke für den auf seine feine Sinne so stolzen Menschen, daß hier und anderwärts unsre Sinnlichkeit so unzureichend ist, daß gerade ihr schärfster Theil, die Seh-Kraft, hier so leicht irre führet, und so schwankend entscheidet, ja daß sie, sich selbst überlassen, nicht einmal mit der bestimmten Schäzung von drei bis vier Linien fertig werden kann, wenn man nicht eine unter die andre geflissentlich verbirgt, also gar dem Auge entrückt,

rückt, (und so gerade gegen den eben geschäftigen Sinn selbst gleichsam einen Raub begeht;) d. h. blos durch Congruenz, und Decken oder Uebertragen, die Vergleichung befördert, und erst dadurch sichre Aussprüche über Proportionen möglich macht. Wars nicht die Einheit der Linie, de, in zwei Dreiecken, welche sonderlich oben, Fig. 2. unser Erkenntnis hervorbrachte? Wir stellten hierauf die Dreiecke heraus; aber die Bedingung blieb für uns fortan wesentlich: sie seien ähnlich, in so ferne jene Linie, de, durch Aussezung an einen andern Ort nichts von der Gröse verloren haben dürfe, die sie als Perpendikel hatte; und so, als sich selbst gleich fest-angenommen, ward sie im kleinen Dreieck Katheius, im gröfern Basis.

Eben so half in dem Beweis der gleichen Winkel vorzüglich der gemeinschaftliche in a und in l wesentlich aus; (in der Vorstellung, Fig. 3. war r = l, einer und derselbe auf einer Stelle.) Da zwingt denn wieder blos die Einheit der Anschauung Zubilligung ab, und erst, wenn dieselbe vorgängig als Bedingung angenommen ist, kommt man mit Zusammenstellung und ausgesextem Gegeneinanderhalten fort. —

Die nothwendige Anerkentnis der Uebereinkunft eines jeden rechten Winkels mit jedem andern rechten, beruht weiter ebenfalls blos auf Congruenz, und Deckung. Daher unser obiger Beweis bei den Winkeln n = m eben darauf hinaus lief. Und so stüzt sich die Sicherheit geometrischer Identität immer auf Beschränkungen des Auges auf einen und denselben eingenommenen oder gezeichneten Raum. — Es ist ein demüthigender Gedanke, ich wiederhole das Wort, aber es ist Wahrheit, die Feinheit unsrer Sinnlichkeit trägt hier keinen Ruhm davon; Trigonometrie zeugt auf jedem Blatt, mit jedem ihrer Beweise, wie wenig wir uns auf die Schärfe des bestes Auges verlassen können; sie beugt den Stolz des cultivirtesten Gefühls; dann sie macht aus, und bringt ins reine, was unmittelbare Anschauung vergebens hin und her wendet, und in dunkler Unbestimmtheit liegen läßt. Wenn mir der Ausdruck nicht zu typisch oder gar zu mystisch klänge, so würde ich wol sagen können: „Das Auge ahndet blos, wo der Verstand erkennt;“ Selbst, wo schon Gewißheit vorhanden, und Zubilligung von der Gleichheit oder Aehnlichkeit

keit gewiſſer Figuren abgenöthigt iſt, da verweilt der Blick oft noch mit Zweifeln, und will ſich manchmal lange nicht befriedigen. Ein Beiſpiel giebt manche Zeichnung der zwei kleinern Quadrate zum Qu. der Hypotenuſe, wo manches Auge es ſchon gewagt hat, ein Splitter-Richter — an der Erfindung des groſen Pythagoras zu werden. Aber unzählige Beiſpiele wird ſich jeder Freund der Mathematik ſelbſt geben können; dann es werden jedem hiebei gar leicht die tauſand Bedenklichkeiten und Anſtände erinnerlich ſeyn, welche ſonderlich das Studium der Geometrie erſchweren, die Zögerungen aufgeforderter Beiſtimmung, die unangenehme Suspenſionen, wenn der Lehrer (auf dem Katheder oder im Buch) bereits dreiſt von zuverläßig-intuitiver Ueberzeugung ſprach, und gar die Möglichkeit des geringſten Widerſpruchs bei dem und jenem Beweiſe leugnete. . . .

Wiederholte Anſchauung derſelben Linien macht's alſo nicht aus! Das Auge führt zu keinen gedeihlichen Schlüſſen, wenn nichts weiter vorgenommen wird. Damit alſo der Pendikel,

pendikel, und nachher durch Substitution der Sinus, das Prädikat erhalte, er sei mittlere Prop. Grösse, so mus als Haupt-Erforderniß geometrische Construction behülflich seyn. Denn weder der Begriff der senkrechten Linie, noch des Sinus an sich, noch der zwei Segmente, erzeugt je die Erkenntniß dieser Qualität; Da muß man demnach über den Begriff hinaus gehen, die gedachte Linie in Verbindung mit gewissen andern Zeichnungen stellen, sie als wesentlichen Theil zweier oder dreier andrer Gestalten anbringen, und so zu verschiedenen Vergleichungen erst geschickt machen, *) indem man neue Beziehungen erst erzeugt hat.

Also gelangen wir blos durch Synthesis zu der Erkenntnis der gedachten Eigenschaft, die wir an jedem Perpendikel auf einem Diameter, und an jedem Sinus, prädiciren; und woraus wir demnächst, wiederum synthetisch, zu andern Bemerkungen fortrücken.

Tri-

*) Das ist das, meines Bedünkens, was Herr Prof. Kant synthetische Construction der Begriffe nennt, welchen die Anschauungen im Raum selbst correspondiren.

Trigonometrisch genommen, erhielten die zwei Segmente des Diameters nur andre Namen, wie auch der Perpendikel selbst. Die Einheit des Bewußtseyns also, daß es dieselben Linien noch seien, berechtigte zu dem Schluß: „Der Sinus sei die mittlere Pr. Gr. zwischen dem Sin. Vers. und der Summe des Radius und Cosinus;“ in dem ja bloser Namens-Ausdruck an einem Gegenstand des Auges selbst nichts ändern kann. Die folgende Ausdrücke, da für ae, oder für den

Sin. Vers. gesezt wird: rad—cos. (die Diff. des R. u. Cos.)

und für das gröfere Segment el,

die Summe des Rad. u. Cos. rad + cos.

beziehen sich ebenfalls auf Einheit der Anschauung, und auf allerwärts vorhandene synthetische Einheit des Bewußtseyns. Eine schnelle Erinnerung, in welchen Functionen diese Linien in andern Hinsichten gebraucht werden, tritt allemal ursprünglich dabei ein, und veranlaßt die eben erwähnte Benennungen, für welche man allerdings eine gewisse Vorliebe vor den allgemeinen Signaturen, ae, el, u. s. w. in sich empfindet, weil sich mehr dabei denken

läst, und der geschäftige Wiz des Menschen gar bald neue daraus mögliche Combinationen vermuthet, auch sich wirklich weiterhin solche daraus glücklich verschaft. . . .

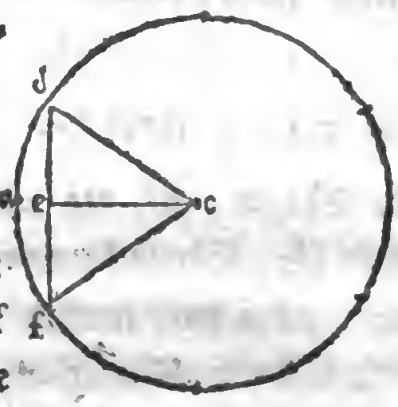
Was sich ferner hierüber noch sagen liese, sei auf einige Räsonnements über etliche der nächstfolgenden Theoreme verspart. — Wir wollen zu einer Vorstellung nun fortschreiten, aus der wir ersehen werden, daß der Sinus nicht blos als Mittel-Prop. im Kreis zu betrachten sei.

§ 3.

Es erhellet aus obigem wohl hinlänglich unter andern so viel, daß der Radius in einem Kreis, und jeder gezeichnete Sinus in demselben sonderlich in Vergleichung kommen. Wann man jeden gegebenen Sinus auf den Halb-Messer legt, so dekt er ihn zuverläsig niemals ganz, (falls er nicht vertikal über c steht, d. h. Sinus totus ist.) Stellt man sich dann auf dem Halb-Messer eine gewisse Menge gleicher Theile eingezeichnet, (markirt) vor, wie dann würklich derselbe = 10,000000, oder als in

10 Million-Theilchen zerfällbar, vorgestellt wird, so wird leichterachtlich jeder aufgetragene u. in Gedanken darübergelegte Sinus eine gewiße bestimmte Menge dieser Theilchen decken, und also durch Congruenz auf der Stelle, wo er liegt, sich selbst bestimmen. Deckt er also den Radius nur zur Helfte, so wird er 5,0000000 solcher Theilchen unter sich fassen. Das ist sehr simpel einzusehen. Aber, man mag ihn nun, als Perpendikel, oder als Sinus betrachten, so ist er, wie wir wissen, in jedem Fall auch die Helfte einer Sehne, welcher nothwendig ein gewisser Bogen im Kreis correspondirt... Wie groß wird dieser Bogen der ganzen Sehne, (Fig. 5 da, d f £ genannt,) seyn? Diese Frage ist sehr natürlich, sie sezt weiter nichts, als eine zweite hiemit eingetretene Vergleichung, voraus. Der gedachte Bogen über der Chorde, (d. h. über dem doppeltgezeichneten Sinus,) mus ja ein Stück des Kreises seyn; also kommt da abermals ein Theil gegen ein

Fig. 5



Ganzes in Betracht. Dieſes Ganze wird bekanntlich, als = 360 Grade, folglich ebenfalls ſynthetiſch gedacht; alſo mus jeder einzelne Bogen dagegen, als ein gewiſſes Fragment, (als Zal = $\frac{360}{n}$ allgemein) vorſtellbar ſeyn. Nun iſt aus den Anfangsgründen eines jeden geometriſchen Lehrvortrags notoriſch, daß jeder Cirkel, durch ſechs gleiche Einſchnitte abgetheilt, ſechs Bogen darſtelle, deren Sehnen alle gerade dem Halb-Meſſer des Cirkels gleich ſind, und umgekehrt, daß jeder Kreis durch Umtragung ſeines Halb-Meſſers innerhalb der Peripherie, eben in ſechs gleiche Theile zerfällt werde; alſo muß ja wohl der Bogen, $\frac{360}{6}$ = 60° der Chorde, df, die wir als unſern doppeltgezeichneten Sinus kennen, correſpondiren. Verfährt man nun endlich regreſſiv, und halbirt dieſe Chorde, halbirt aber auch das Maas des Bogens von 60 Gr. mit, denkt alſo zugleich auch den Sinus nur wieder einfach (als Perpendikel auf einer Seite blos, wie er anfangs gegeben war, = $\frac{1}{2}$ r,) gezeichnet, ſo kommen notwendig die Gleichungen heraus:

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}df = de = \frac{60}{2} = 30 =$ dem Sin. $\frac{1}{2}r$,

oder, mit Worten ausgedrükt, heist die Folge: „Der Sinus von 30 Graden ist der Helfte des Radius jederzeit gleichzuachten, und umgekehrt: $\frac{1}{2}r =$ Sin. 30°; Weil aber r schlechthin öfters = 1 genommen wird, so findet man häufig blos gesezt: Sin. 30 = $\frac{1}{2}$.

Nach Voraussezung dieses bestimmten Falls wird wohl die Definition des Sinus, die die kürzeste ist, und Anfängern so oft nicht behagen will, einleuchtend genug seyn: „daß ein Sinus die halbe Sehne des doppelten Bogens durchaus sey.“

Corollar. Man kann jeden Sinus, als das 4te Glied einer geometr. Proportion betrachten, und, in einem gewissen Verstand, einen Quotienten heisen. Einer unsrer ersten Mathematiker Deutschlands, Herr Prof. Klügel zu Halle, dringt sehr darauf, diesen Ausdruck mehr in Ehren zu halten, und öfters anzuwenden, als gewöhnlich geschieht. Es ist allerdings an dem, daß dabei die Verhältnisse

zweier Bögen, hier df, und ad, einer ganzen und einer halben Chorde, und die Verhältnisse des Sinus totus zu einem bestimmten Theil desselben, welchem der Bogen, ad, correspondirt, wesentlich in Erwägung kommen, und daß ihre Zusammenordnung so ausfallen mus:

$$\begin{aligned} df : da &= \ldots\ldots\ldots \\ df : de &= 1 : \frac{de}{df} \\ \text{Sin. tot} : \text{Sin. } 30^\circ &= r : \frac{r.\,\text{Sin. } 30.}{\text{Sin. tot.}} \\ \text{Chord. } 60^\circ : \frac{\text{Ch. } 60^\circ}{a} &= 1 : \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

woraus denn auch wol das Prädikat eines Bruchs, welchen man jedem Sinus beizulegen pflegt, verständlich wird, eben weil man ihn, graphisch, als ein Stück des Halb-Messers, und arithmetisch, als eine abgerissene Zal der grosen Zal-Gröse eben desselben, d. i. als Fragment von 10 Millionen, ansehen kann.

Man findet hier hinter dem Gleichungs-Zeichen zu dem ersten Verhältnis (df : da) Pünctchen gezeichnet; Der Plaz ist geflissentlich leer gelassen, weil die Bögen, df und da, als ungleichartige Grösen, gegen gerade Linien

nien keine bestimmte Vergleichung, wie zu einer Proportion gehört, vertragen oder zulassen. Bögen geben zunächst die Winkel an, deren Maas sie abgeben, die Winkel aber haben, in einem gewissen Sinn, mit Sehnen gar nichts zu thun, *) und in dieser Rücksicht auch nicht mit halbirten Sehnen, oder Sinus, und Perpendikeln. Dagegen macht das Verhältnis des Halbm. zum Sinus, als gerad-linichte Länge quantitativ erwogen, den Quotienten oder den Bruch, $\frac{dc}{df}$, aus, welcher eben jederzeit bei den vorliegenden Erörterungen in Frage vorkommt.

Rä-

*) Ich behalte den Ausdruck bei, dessen sich der scharfsinnige Recensent der Basedowischen Grundsäze d. r. Math. im 9ten Stück der Einleit. zur mathem. Bücherk. s. 245. bedient hat. Basedow gebrauchte den als unadäquat gerügten Ausdruck: „Der Sinus eines Winkels sei die halbe Sehne des doppelten Winkels.“ — In dem folgenden Räsonn. werde ich noch einiges zu wol nicht überflüssiger Beleuchtung hierüber beibringen.

Räsonnement

zu §. 3.

Der Stellen sind unzählig-viele, in welchen der Sinus (nach §. 1 und 2.) als Mittel-Proportionale sich darstellt.

Unter allen diesen sind nur zwo auf dem Diameter, (rechts und links,) in welchem er als Helfte des Radius erscheint, und, wenn man den Blick nur auf einen Radius heftet, und denselben im Act des Chorden-Durchschnitts denkt, ists nur eine einzige Stelle in jedem zugehörigen Kreis, in der der Sinus $= \frac{1}{2}r$ ist.

In §. 1 und 2 hatten wir ganz andre Beziehungen uns zum Augenmerk genommen, als die sind, welche uns §. 3 beschäftigen. Hier vergasen wir ganz der Hinsicht, das der Sinus als Mittel-Proportionale geachtet werden könne; Hier ward er nun nur als 2tes und 4tes Glied einer geom. Proportion brauchbar, dort sahen wir ihn immer als 2 und 3tes in der Mitte.

Dort

Dort betrachteten wir blos den Durchmesser in der Kategorie der Allheit oder Totalität, wenn gleich oft synthetisch, als aus drei Stücken bestehend: (Sin. vers. + cos + rad), und bezogen die Gröse des Sinus immer auf den Durchmesser, als auf ein Totum.

Hier denken wir den Radius in der Kategorie der Allheit, und beziehen die Länge des Perpendikels auf ihn; er ist uns gleichsam regulatives Princip, von welchem wir ausgehen. Seine Anschauung, unter den Verstands-Begriff der Quantität subsumirt, und demnächst durch eine feste Zal bestimmt, giebt Maas und Ziel zur Vergleichung für den eben darauf-hin bezogenen Sinus, er mag im Kreis stehen, wo er will; Bei complicirten Ausspähungen hierüber also zunächst wol für den, der selbst nur halb so gros, als der regulirende Radius ist. Denn die Scheidung eines Gegenstands zur Helfte ist für den menschlichen Verstand überall, wo ihn Maas u. Quantität beschäftigen, der leichteste Regressus. — Aber last es uns ja nicht aus der Acht lassen, daß bei jeder Signatur, die da heist Sin. 30°, oder Sin. n°, die

Rela-

Relation auf ein zweites Haupt-Object verſtekt liege, welches wir, als Gröſe, ebenfalls in der Kategorie der Allheit denken, nehmlich auf den Kreis, deſſen Totalität ſynthetiſch als = 360 Gr. vorgeſtellt wird. Er läst ſich durch aneinandergeſezte Bögen progreſſiv conſtruiren; ſind dieſe ſo gleich, daß die darunter geſpannte Sehne jedesmal den Radius des Kreiſes ſelbſt abgeben kann, oder, wenn etwa hie und da eine in Zeichnung nicht ausgedrükt wäre, (auch wenn ſie gar alle fehlten,) daß der Halbmeſſer des Kreiſes nur entlehnt werden dürfte, um ſie anzuſezen, (ſubtenſas inſcribere,) ſo iſt da allerdings ein feſtes Verhältnis, auch bei jedem Sinus, d. h. bei jeder halben Sehne, welcher ein gewiſſer Bogen correſpondirt, eben ſo ſicher vorhanden, und mit jedem Sinus wird ein gewiſſes Fragment von 360 geſezt, welches bei 6 Bögen eine Rata von 60, und bei 12 Bögen von 30 Graden befaſſen mus. . . . . .

Da ich im Anfang meines mathem. Studiums den hiebei ſich durchkreuzenden Ideen-Aſſociationen, ziemlich unbelehrt, öfters nachdachte,

dachte, so wollte es mich fast immer bedünken:

1) daß der durchgehends gebräuchliche Ausdruck, Sin. 30°, Sin. n° u. s. w. wirklich die Vergleichung zweier ungleichartigen Grösen involvire,

2) daß bei zunehmenden Sehnen, u. halben Sehnen sich allerdings auch an die Grösе der Winkel gedenken lasse, welche den Bögen der Sehnen, und halben Bögen der halben Sehnen zugehören, und daß diese Ideen-Combination eben keine so arge Kezerei seyn dürfte. Ich verglich hiemit einige Stellen in den Kästnerischen Werken, z. B. §. 22 seiner Geom. im 7ten Zus. wo die Menge von Winkeln und die Menge von zugehörigen Bogen-Graden für Vergleichung gegen einandergestellt, und dabei geäusert wird: „Das sele ein Fall, daß das Maas einer Sache nicht mit ihr von einerlei Art sei, und nicht in ihr enthalten seyn könne; aber ihr doch proportionirt sei; Eben so pflege man Wege durch Zeit zu messen, und in andern Fällen zu verfaren.“

Auch in Hrn. Hof-Pred. Schulzens Darstellung der Evidenz seiner Paralelen-Theorie

§. 43. 44. fand ich denſelben Gedanken, daß der erwähnte Gebrauch des Ungleichartigen für Kundige in Mathematik nichts aufallendes mehr an ſich habe.

Auch in Hr. Prof. Klügels anal. Trigonom. las ich: „Der Sinus eines Winkels ſei die halbe Chorde des doppelten Winkels! und da die Geometrie die Seiten des regulären Viereks, Fünf und Sechseks liefere, ſo ſeien deren Helften die Sinus der halben Centri-Winkel. . . . . (Cap. I. §. VII.)

Dieſes ſtimmte dann, wie es mir ſchien, allerdings nicht recht mit dem, was oben im Ausgang des §. 3 ſteht, noch mit der Baſedowiſchen Rüge überein? —

Bei wiederholtem Nachdenken kommt man aber gar bald durch folgende Mittelbegriffe, meines Erachtens, völlig ins reine: Man vergleicht Sehne und Halb-Meſſer, als Länge und als Zal; man vergleicht Bogen, und Umkreis; man vergleicht Bogen und Oeffnung des Winkels, und man kann ſichs nicht erwehren, da jeder Bogen nur eine gewiſſe Sehne, und umgewandt, jede

Sehne

Sehne nur einen gewiſſen Bogen hat, auch Bogen und Sehne, zu vergleichen.

Aber man geräth ganz aus dem rechten Gleis, und die Vergleichung wird völlig = unſchicklich,

1) wenn man die halbe Sehne, (de = $\frac{1}{2}$df) mit der Sehne verwechſelt, welche ſich unter dem Bogen, da, als deſſen ganze Chorde, ziehen läst, und welche natürlich immer länger iſt, als de;

2) Wenn man daher, z. B. in der obigen Proportion, (ſ. 26) es für einerlei hält, ſtatt Chord. 60° : $\frac{\text{Ch. } 60°}{2}$, den Ausdruck ſo zu ſezen: Chord. 60° : Ch. 30°, welches niemals vergönnt ſeyn kann, weil eine halbirte Chorde von 120 Gr. immer ja kürzer ſeyn mus, als eine von 60 Graden, da ſie, als Perpendikel, auf den Radius fällt, dagegen die Linie, welche, als ganze Sehne, unter dem Bogen von 60° hinläuft, immer zu Bildung eines ſpizen Winkels ſich neigt, auch in Quadrirung jederzeit die Hypotenuſe abgiebt, wo hingegen die andre ($\frac{1}{2}$ df) nur als Kathetus

erſcheint. Der Bogen an der Peripherie zu der Sehne, welche man Ch. 30° bezeichnet, iſt freilich, in Graden abgezählt, und fürs Auge, ſo gros, als der Bogen der Peripherie, welchen man ſich bei der Signatur $\frac{Ch.60°}{2} = Sin30°$ in Graden, vorzuſtellen hat; aber es iſt ja hauptſächlich und primario von der geraden protenſiven Länge, und deren Meſſung nach dem Radius, die Rede, und von dem Auswurf in Zalgröſe, der Beſtimmung des leztern gemäs. Man vergleicht alſo (3tens) ganz und gar unſchicklich, wenn man die Fundamental-Beziehung auf zwo ganz verſchiedene Einheiten vergißt, oder verwechſelt, von welchen die eine der Umkreis, die andre der Radius iſt. Nur auf jene weiſen die Grade der Bögen, als Fragmente von 360 hin, auf dieſe aber die Sinus als Fragmente von 10 Mill. (4tens) wenn man ſich endlich mit dem Gedanken trägt: „Weil in dem Bogen von 1 bis 90 Graden (von a bis h, Fig. 4.) Der Raum welchen z. B. die vordern 4 Gr. einnehmen, ſo gros, als der iſt, welchen 86—90 einnehmen, ſo werde ſich's mit den Sinuſſen eben ſo verhalten, und alſo

wenn

wenn der Sinus, als Perpendikel vorne, von a aus, von der Menge der Räumchen (von 10 Mill.) z. B. über vier, gegen dem Centrum zu, gerückt wäre, und damit einen gewissen Bogen (von 1° . . . hin) zurückgelegt hätte, so würde dem nehmlichen Weg, horizontal hin, nahe am Centrum gedacht, noch ein eben so groser Bogen entsprechen, (correspondiren,) oben nahe an h, wie vorne an a.“ — Diese Vorstellung, die beinahe jeden Anfänger plagt, und verirrt, ist grund-falsch. Der leztere Bogen ist ja immer viel kleiner, als der erstere; Ein Ruck des Perpendikels über 4 Mill. Theilchen vorne bei a, beträgt weit mehr oben am Bogen, als ein gleicher Ruck über 4 Mill. Theilchen, nah am Sinus totus. Man zeichne sich nur selber einen (der deutlichen Einsicht wegen, etwas grosen) Halbkreis, ziehe auf dessen Radius Perpendikel in gleichen Abständen, (etwa nur 4 oder 8 Sinus,) und sehe dann auf die Bogen hin. . .

Nur eine geringe Aufmerksamkeit wird jeden zur Ueberzeugung bringen, daß man sich einen ganz und gar verwerflichen Trugschluß erlaubt habe; und daß es daher auch im weitern Ver-

folg des Gedankens, ganz irrig sei, wenn man sich z. B. die Proportion als rechtmäsig einbildet: Sin. 30° : Sin. 45° = 5 Mill. : 746666, Sonst müßte ja auch eben so gültig die Proportion seyn,

Sin. 30° : Sin. 60° = 5 Mill. : 10 Mill.

welches doch offenbar nicht seyn kann, indem wir ja schon wissen, daß nur dem Sin. von 90 Gr. oder dem Sinus totus = r, diese Gröse von 10 Mill. zukomme. . . .

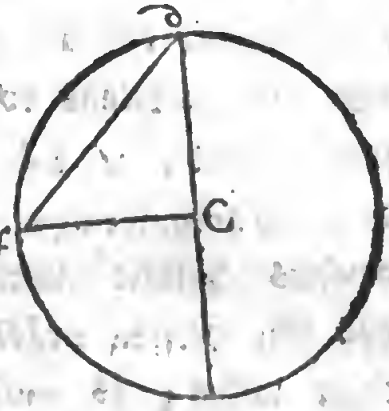
Anstatt das Räsonnement hier weiter fortzusezen, wozu noch Stoff genug wäre, last uns lieber sogleich unser Augenmerk auf den speciellen Fall richten, wie dann wirklich der so eben angeführte Sinus von 45°, richtig auscalculirt werde?

§. 4.

Durch die Seite des Sechsecks, die dem Radius immer gleich ist, hatten wir leicht, da wir sie als Sehne, und dann als halbe Sehne betrachtet hatten, den Sinus = $\frac{1}{2}$ r gefunden. Nun sei zur Sehne die Seite eines Vierecks ange-

angenommen, wo leichterachtich 2 Radii rechtwinklicht im Centrum zuſammengeſtellt, und unter einen Bogen von 90 Gr. d. h. unter einen Quadranten die Chorde, df, geſpannt wird. Sie iſt Hypotenuſe, in ſo fern ſie ja dem rechten Winkel in C entgegen ſteht; Ihr Quadrat alſo fd^2 würde, nach dem Pythagor. Theorem ſo gros ſeyn, als die Quadrate des Kathetus und der Baſis, d. i. $fd^2 = fc^2 + dc^2$. Da aber hier der Radius die Baſis, und auch den Kathetus vorſtellt und ausmacht, (denn fc iſt $= r$, und dc $= r$ ebenfalls,) ſo läst ſich unſtreitig als Aequival. ſezen: $fd^2 = dc^2 + dc^2$, oder $= 2(dc)^2$; in Worten: Die quadrirte Sehne iſt da ſo gros, als der quadrirte Radius doppelt genommen, oder 2 mal gedacht. Der Schluß von Quadraten, die gleich ſind, auf gleiche Wurzeln iſt aber notoriſch bündig; alſo iſt ſicher

Fig. 6

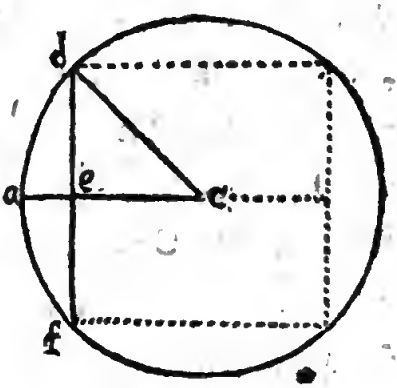


$\sqrt{fd^2}$, d. h. $fd = \sqrt{2(dc)^2}$, $= \sqrt{2r^2}$.

wodurch wir (durch einen regreſſiven Act der

Vorſtellung) die unquadrirte Linien der Figur ſelbſt wieder vor uns erhalten, in welcher fd dem Bogen-Maas von 90 Gr. correſpondirt; folglich auch, $\sqrt{2}\,dc^2$. Ein gleiches mus ſich demnach auch, wenn beederſeits halbirt wird, von den Helften prädiciren laſſen; es muß

Fig. 7.



$\frac{90°}{2} = 45° = \frac{fd}{2} = \frac{\sqrt{2}dc}{2}$,

oder, die halbe Chorde, mus eben der Sinus von 45 Gr., und im Calkül ſo gros ſeyn, als die halbirte □ Wurzel aus zwei quadrirten Radien $= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(dc)^2$, in der Fig. 7 = dem Perpend. de.

Wird nun der Rad. cd = 1 genommen, ſo läßt ſich, (da 1 nicht mult.) auch ſezen:

Sin. $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $= \frac{\sqrt{2r}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

und wenn die □ Wurz. aus der Zal 2 wirklich nach der Ordnung gezogen wird, (da bekanntlich herauskommt, $\sqrt{2} = 1{,}4142136....$) hievon die Helfte,

$$\frac{1{,}4142136}{2} = 0{,}707168.\,r = \frac{\sqrt{2}.r}{2}.$$

Dieſe

Dieſe Decimal-Zifern, (deren erſte ja $\frac{7}{10}$ iſt) verwandeln ſich aber in ganze Zalen, wenn man rad. = 10 Millionen nimmt, wo $(dc)^2$ = 100 Billionen, das doppelte aber oder $2\,(dc)^2$ = 200 Billionen ſind; Hievon die □ W., giebt

$\sqrt{}$ 200000000000000 = 14142136....

von welcher Gröſe die Helfte: 707168, eben die Zal iſt, welche ſich in den natürlichen Sinustafeln findet, wenn man den Sinus von 45 Gr. aufſchlägt.

Räſonnement

zu §. 4.

Wir kennen nun zwo halbe Sehnen, die ſehr merkwürdig ſind; die unter dem Bogen einer Hexagon-Seite, und die unter dem Quadranten, $\frac{r}{2}$ und $\frac{\sqrt{2.r}}{2}$, in Rechnung. Wer ſieht nun nicht ein, daß dieſe, als Gröſen in ganz andern Verhältniſſen erſcheinen, als die einzelne Bögen von 30° und 45°, welche das geometr. Verhältniß, 2 : 3, gegen einander tragen? ... Da ſich die □ Wurzel weder

aus 2 noch aus 20, noch aus 20 Billionen jemals rein heraus ziehen läst, so erhellet schon für sich, daß da an kein vollkommen-richtiges Verhältniß überhaupt gar nicht zu denken sei, und man also das Aequivalent von $\sqrt{\frac{2}{2}}$ als = 707168... gesezt, blos als eine Approximations-Gröse anzusehen habe. Aber auch, wenn sie für sich rein wäre, so bleibts doch dabei, wie schon oben gedacht worden, daß nimmer mehr von dem Verhältnis zweier Bogen, (und deren verglichenem Maas in Graden,) auf das Verhältnis zweier dazu gehöriger Sinus *) gegeneinander geometrisch geschlossen werden dürfe. — Man verbinde ferner die Ansicht des Kreises, mit einem Blick in die natürliche Sinustafel; man wird sich überzeugen, daß die Aendrungen der Sinusse immer kleiner werden, je näher sie dem Ende des Quadranten, oder dem Centrum zurücken. Dem Sinus von 1 Grad gehört die Zal zu 174524; dem von 2 Graden die: 348995: Dagegen ist

Sin. 88° = 9993998.

Sin. 89 = 9998477.

Der

*) Sinus - d. h. auf den Ausdruck der leztern, in Theilen des Halbmessers ausgesprochen! ...

Der groſe Unterſchied bei jenen iſt einleuchtend, wenn man ſie gegen dieſe hält, als welche in den drei höchſten Ziſern, (999) ſich noch ganz unverändert zeigen. . . .

Ich befürchte Tadel von denen, welche alles dieß ſchon längſt wiſſen, und leicht gefaßt haben; jede Commentirung über dieſe Sujets ſcheint ihnen wol überflüſſig, weil ſo viele gute Bücher ohngefähr das nehmliche ſchon enthalten. Aber ich weis ganz gewis, daß man allerwärts über Dunkelheit und Kürze eben in Rückſicht auf den Vortrag dieſer Säze klagt; und daß ſie deshalb von vielen Tauſend nicht verſtanden werden, weil groſe Mathematiker ſich bisher gleichſam geſchämt haben, hierüber ins Detail zu gehen. Ich weis, daß viele tauſende gar nicht unfähige, noch auch ſonſt der Mathematik abholde, ja wol ſelbſt in Geometrie bewanderte Männer mit Unwillen ſchon das Wort Sinus ausſprechen, und ausſprechen hören. Ich weiß, daß die Vorurtheile hierüber der Verbreitung des Studiums der Mathematik weſentlich ſchaden. . . Darum habe ich mir dieſe wenige Räſonnements

dann erlaubt, und erlaube mir auch weiters dazu noch einen Wunsch, der in das Gebiet der Pädagogik einschlägt, (wo ja ohnedem bisher so vieles vergönnt war, zu wünschen!) daß doch unsre Jugend vermittelst schicklicher Modellen von Halbzirkeln und Quadranten frühzeitig mit mehreren der hierher gehörigen Vorstellungen möchten vertraut gemacht werden. Es könnten gar füglich mehrere Chorden und Perpendikel, z. B. auf Stäben mit Rinnen, angebracht werden, welche sich durch einen leichten Mechanismus schieben liesen, auch oben im Bogen neben den Graden von 1 — 90 eine Verzeichnung hätten für die Abstände und Längen der Sinus zugleich, welche wol dann jedes Kind von 8 bis 10 Jaren, vermittelst wiederholten Intuition, für das erkennen lernen würde, was sie sind. Es würde dadurch Begriffe ins Jünglings Alter schon hinüber tragen, von welchen man jezt beinahe erst im 25 bis 30sten Jahr etwas vernimmt. Ich bin gewiß nicht für frühzeitiges Alt-Klugmachen; aber geometrische Intuitionen, schiklich commentirt, — machen gewiß nicht zu früh alt-klug oder überweise... Die Einsicht eines grosen Gesezes

der

der Natur begleitet durchs ganze Leben, und wenn es wahr, simpel und einleuchtend zugleich ist, so erregt gar niemand Zweifel, daß es nüze und fromme, früh damit bekannt zu werden. Hier sind auch Natur-Gesezlichkeiten, simpel und gros, und überall wieder zu finden, und tausendfältig anwendbar. Warum zögerte man just bei diesen? und hielte es für bedenklich, sie nach Möglichkeit zu verbreiten? — Sie fördern zu gewissen Genüssen, so gut als irgend andere! —

Ohngefähr eben so sehe ich auch die Erkenntnisse an, welche man sich eigen macht, wenn man das Verhältniß des Halb-Messers im Kreis zu der Seite des Quadrats, des Dreiecks, des Fünfecks, des Sechsecks, des Zehnecks, u. s. f., welche in dem gegebenen Kreis beschrieben werden mögen, in welchem der Halb-Messer schon steht, erforscht. Diese Beschäftigung veranlaßt nach und nach sichre und sehr weit-führende Blicke in die grose Ordnung der Natur, und gewährt zuverlässig intellectuellen Genuß gar nicht gemeiner Art.... Wir sind bei der Auflösung der vorstehenden

Auf-

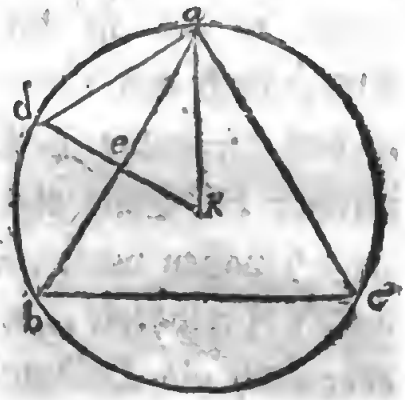
§. 5.

Das Problem heißt also:

„Das Verhältnis der Seite eines gleichseitigen „Dreiecks zum Radius des Kreises zu finden, „in welchem das Dreieck eingezeichnet steht.“

Erläuterung. Der Radius ist als Zal-Grösse gegeben, und im Maas bekannt. Er steht in einem Kreis, in welchem die 3 Seiten des Dreieks drei gleiche Sehnen ausmachen müssen. Da ist nun die Frage: wie gros ist eine dieser 3 gleichen Seiten d. h. eine solche Sehne, gegen die Grösse des Radius zu achten? Weil das Δ, der Bedingung gemäs, gleichseitig ist, so ist es einerlei, welche Sehne man zur Vergleichung mit dem Halbmesser wählt. Laßt uns hier, der Zeichnung gemäs, die Sehne, ab, mit dem Rad. dk, in Betracht nehmen.

Fig. 8.



Auflösung. Aus den Anfangsgründen der Geom. ist bekannt, (auch giebts der klare Augenschein,) daß, so wie das Sechs-

eck

eck 6 Punkte im Kreis bezeichnet, welche sechs gleiche Bögen von 60 Gr. angeben, eben so das Dreieck 3 Puncte berühre, welche 3 gleiche Bögen von 120 Gr. angeben. Die Syntheſis eines Kreiſes aus drei gleichen Bogen-Stüken, welchen drei gleiche Sehnen correspondiren, iſt nicht anders gedenkbar, als:

$\frac{360}{3} \cdot 3 = 120 \cdot 3$. Ein ſolches Drittel iſt demnach der Bogen, ab = 120°. Fällt man vom Mittelpunct aus einen Perpendikel, de, auf die Sehne, ab, ſo halbirt er dieſelbe in e, und wenn er bis in die Peripherie fortgezogen wird, auch den zugehörigen Bogen von 120°, ſo daß die andre Helfte da = 60° bleibt, zu welcher die Seite eines Sechseks (als Sehne = r) paſſen mus. Der Perpendikel, de, bis an die Peripherie, wie gedacht, gezogen, iſt aber auch als Halbmeſſer zu betrachten, d. h. dk = r; Und ak, vollends desgleichen. Alſo ſind unverkennbar

dk = da = ak, jede Linie = r,

zuſammengeſezt zu einem notwendig-beſtimmten gleichſeit. Dreiek, (akd) je nachdem das bekannte im Kreis, abc, gros iſt. Die groſe Sehne, ab, iſt

iſt nun, als in e durch dk, den Radius, halbirt, auch = ae = ½ ab zu bezeichnen. Dieſer Radius, dk, aber wird dagegen reciprok von der Sehne, ab auch ſelbſt in e halbirt, weil ſie oben in a, gerade durch die Spize des gleichſeit. △ hindurch (herunter ihrem Ziel in b zu) fährt, und in e als Perpendikel auf einer Baſis vorſtellbar iſt, welche zu beeden Seiten gleiche Winkel führt *) Dieſe Halbirung berechtiget zu der Bemerkung folgender Gleichungen:

$$\frac{dk}{2} = \frac{r}{2} = \frac{da}{2} = ek = de,$$

in welchen kein Glied mehr, als die Helfte des Halbmeſſers, beſagt. Eben, weil aber die Linie ae, ſenkrecht aufſteht, alſo einen (da ge-

*) Befriediget dieſer Gedanke etwa noch nicht ganz, ſo ziehe man in Phantaſie noch zwo Linien db und kb, iede = r, d. h. man verdopple das Dreieck, akd, ſo wird ein Rhombus daraus, in welchem ab, als Diagonale, doch gewis in der Mitte, e, (wo ihre Helfte iſt,) einen Punct bezeichnen muß: welcher von d und von k ganz ſicher gleich-weit abſtehen wird, d. h. de = ek iſt die halbirte Linie, dk.

gegenüberliegenden) rechten Winkel in e veranlaßt, so ist nothwendig da auch als Hypotenuse zu denken, welche also, quadrirt, ($da^2 = r^2$) die zwei kleinern Quadrate der zwo Linien, de, und, ae, zum Aequivalent haben muß; d. h. $da^2 = de^2 + ae^2$; woraus wir den quadrirten Perp. (oder den Sinus) ae_2, allein erhalten, als $da^2 - de^2 = ae^2 = r^2 - \frac{1}{4} r_2$. *)

Der

*) Der Anblick zeigt, daß de die Helfte des Radius, also $= \frac{r}{2}$ oder $\frac{1}{2} r$ sei. Eben diese Linie de aber, quadrirt gedacht, de^2, mus dann nothwendig im gegenseitigen Aequivalent heissen: $\frac{r^2}{4}$, oder $\frac{1}{4} r^2$. Das will Anfängern oft gar nicht in den Sinn. Aber einmal geschieht ja jeder Forderung, einen Bruch zu quadriren, blos in so fern ein Genüge, wenn Zäler und Nenner im Quadrat gesezt werden; wo dann aus $\frac{r}{2}$ im Qu. werden mus $\frac{r^2}{4}$. Zweitens bezeugts ja Intuition, daß ein Qu. auf einer gewissen Linie ——— errichtet, □, jederzeit 4mal so gros sei, als das Quadr., auf der Helfte eben

Der Bequemlichkeit wegen, heiſe nun fortan:

d a, oder d k, = r

Die groſe Sehne, oder die Seite des groſen △, (ab), die wir ſuchen, = x

Deren Helfte, $\left(\frac{1}{2}\text{ ab, oder ae}\right)$ aber $= \frac{1}{2}x$

Wir haben allererſt dieſe Helfte, (od. halbirte Sehne,) gleich als einen quadrirten Kathetus, angeſehen; der Ausdruck $\frac{1}{2}x$ müßte alſo gleichfalls quadrirt gegeben werden, und da käme heraus:

$$ae^2 = \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{xq}{4} \text{ od. } = \frac{1}{4}xq.$$

Folglich ſtünden die Werthe nun ſo:

$$aeq = daq - deq$$

$$\frac{xq}{4} = rq - \frac{1}{4}rq = rr - \frac{rr}{4} = \frac{4r^2 - 1r^2}{4} = \frac{3.r^2}{4}$$

Multiplicirt man hieruächſt in die ſchicklichſte Glei-

---

derſelben Linie. Der Nuzen dieſer Vorſtellung leuchtet gleich wieder bei x, und ſodann noch ferner unzälige mal gewiß ein.

Gleichung, die einerlei Nenner hat, $\left(\frac{x^2}{4} = \frac{3r^2}{4}\right)$ beederseits mit 4, so bleibt $x^2 = 3.r^2$, zwei Quadrate, die auch auf die Gleichheit der □ W. schliesen lassen: $\sqrt{x^2} = \sqrt{3}.\ r^2 = \sqrt{3}$; d. h. x allein, welches ja so viel ist, als $\sqrt{x^2}$, hat zum Aequivalent den unquadrirten Halbmesser, multiplicirt mit der □ Wurzel aus der Zal 3; oder : $x = r.\sqrt{3}$.

Die Mtct. mit dem Radius fällt in Zalen weg, wenn man $r = 1$ annimmt; Demnach bleibt blos $\sqrt{3}$ übrig, und x, die gesuchte Sehne oder Seite des Dreiecks, ab, ist erforscht, wenn man weis, was die Signatur $\sqrt{3}$ bedeutet. Die Qu. Wurzel aus 3 ist aber blos durch Näherung zu finden; und zwar ist sie bekanntlich (in Decimalen):

$1{,}7320508\ldots = 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$ u.s.f.

So hätten wir dann nun also ausgespäht, worauf wir ausgegangen waren. Das Verhältnis ist jezt entdeckt und bestimmt, so nahe hin wenigstens, als sichs bestimmen läßt. Ausgesezt heist die Proportion dann:

r :

$$r : \text{chord. } 120° = 1 : \sqrt{3}$$

$$dk : ab = 1 : \frac{ab}{dk}$$

Ganz dringend fließt daraus, daß, da dieſer Werth für die ganze Sehne, ab, im Verhältniß gegen den Radius (= 1 genommen) gilt, fût die halbe Sehne, oder für den Sinus, ac, $= \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} x$, auch die Helfte der Geltung ſtatt haben müſſe, d. h.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254\ldots = \frac{1}{2} x = \text{Sin. } 60°$$

Ich habe den lezten Ausdruck, ungerechtfertigt, wie es ſcheint, ſogleich geſezt; Aber fließt er nicht evident aus der obigen deutlichen Vorausſezung, daß die Sehne, ab, od. x unter einem Bogen herlaufe, welcher 120 Grade des Kreiſes einnehme? Die Helfte der Sehne iſt aber ja $= \frac{1}{2} x$; alſo müſſen derſelben ſicher $\frac{120}{2}$, oder 60 Gr. correſpondiren, d. h. ihr, der halben Sehne des doppelten Bogens, oder dem Sinus, (der obigen Definition ſ. 25. gemäs,) welchem alſo auch ſchlüßlich keine andre Signatur, als: Sin. 60°, und in Zal Gröſe

kein andrer Gehalt, als $\frac{\sqrt{3}}{2}$, zu kommen kann; *) welcher bemelte Sinus aber demnach auch als Quotient, und als viertes Glied einer geom. Proportion erscheinen muß, in so fern sich ja sezen läßt:

Sin. tot. ; Sin. 60 = 1 : ae

rad. : Sin. 60 = 1 : $\frac{r. \sqrt{3}}{r. \ 2}$

r : $\frac{1}{2}$ x = 1. : $\frac{\sqrt{3}}{2.}$

dk : ae = 1 : $\frac{ae}{dk}$

Räsonnement

zu §. 5.

Um in der ersten Ausforschung glücklich zum Zweck zu gelangen, oder um auszuspähen, wie gros die Seite des im Kreis beschriebenen Dreiecks

*) Nimmt man den Rad. nicht = 1, sondern 10 Millionen an, so folgt leichterachtlich daraus die halbirte Gröse der Qu. Wurzel aus 300 Billionen, mit 17320254, d. h. eben die Zal, welche in den Tafeln bei Sin. 60° sich vorfindet.

ecks gegen den Halb Meſſer des Kreiſes ſei? verfährt man alſo zuerſt regreſſiv, und ſtellt blos die Helfte dieſer Seite, $\left(\frac{1}{2}\ ab\right)$ durch Conſtruction eines (vorhin = nicht vorhandenen kleinern) Dreiecks, akd, in neue Beziehungen.

Dieſes kleinere △ iſt, ſo bald es daſteht, gleichſam in dem Moment ſeiner Geneſis ſelbſt ſchon, getheilt in 2 rechtwinklichte Dreiecke, △ ade, und ack; die halbirte Sehne $\left(\frac{1}{2}\ ab\right)$ iſt in beeden Hypotenuſe, der Radius in beeden Kathetus. Dieſe Bemerkung hälfe uns aber noch nichts, wenn wir nicht auch für die Baſis, eben dieſes kleinern Dreiecks einen Ausdruck ausfindig zu machen wüßten, welcher ſich abermals auf den gegebenen Radius bezöge, — oder, (noch ſtringenter,) welcher in beeden ihre Baſis, als beſtimmten Theil des Halb Meſſers, als evidentes Fragment von r, darſtellte. Im Enſemble wiſſen wir wol, daß ſie der Radius (ſynthetiſch) beede zuſammen ausmacht. Aber, daß ſie gleich, daß ſie aus einer Theilung zur Halbſchied entſtanden ſeien, mußte bewieſen werden; und dieß

ward bewiesen, ich meine erst ganz vollständig durch meine in der Note S. 47. angeschlossene Bemerkung. Wir wurden überzeugt, daß die Basis in jedem dieser kleinern Dreiecke $= \frac{1}{2} r$ sei. Nun geht wieder alles auf die Linie $\frac{1}{2}$ ab, los; sie wird, als halbe Sehne, und als Kathetus, quadrirt; also ist da das Verfaren ein progressiver Act, gleichsam eine Erhöhung ad interim, um zu erfaren, in welcher Gestalt ac, vervielfacht, erscheinen möchte? Sie zeigt sich als $\frac{x^2}{4} = \frac{3 . r^2}{4}$, nemlich als quadrirte halbe Sehne, und als quadrirten Kathetus, eigentlich als das Aequivalent desselben, im Quadrat, gesezt; $(d a^2 - d c^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2)$.** Künstliche Ehre ist aber von kurzer Dauer; man nimmt die Dignität, welche man dem Object der Prüfung $\left(\frac{1}{2} ab\right)$ nur versuchsweise hatte angedeihen lassen, schnell wieder hinweg; und so stehen in der Blöse die unerhöhte Wurzeln da: $x = r . \sqrt{3}$; d. h. die simple ganze Sehne, ab, in einem aequivalenten Werth, wel-

welchen eine von dem bekannten Halbmesser hergenommene Zal-Grösse ausdrückt. Mit andern Worten: die Sehne ist mit dem Maasstab des Radius ausgemessen, und das gesuchte Verhältnis entdeckt.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß zu dieser demonstrativen Erkenntnis, zu welcher wir somit durchgedrungen sind, Zurükführung auf Einheit der Benennung, (Reduction unter einerlei Nenner,) Verwandlung in Gleichartigkeit, wesentlich erforderlich war, wie sie es zu allen ähnlichen auch tiefer versteckt-liegende Erkenntnissen immer ist. Schüchtern beziehe ich mich hier auf Blätter meiner eigenen Production, in welchen ich umständlich hievon gehandelt habe. Jede Selbst-Citation hat beinahe etwas anstösiges; Aber, sollte ich hier wohl blos wieder abschreiben, was dem Publicum schon einmal mitgetheilt ist? . . . Ich verweise also nur auf §. 20. und §. 56. 57. meines Versuchs, der Einrichtung unsers Erkenntnis-Vermögens durch Algeber nach zu spüren. —

Uebrigens bemerkt man wol ziemlich bald, wo in der Auflösung unseres Problens die geometrische Construction, die für das Auge geführt war, gleichsam dem Blick entgeht, und dem Geschäft des Algebraikers, der weiter hin (bis ans Ende der Erforschung) auf keine Figuren-Zeichnung Rücksicht nimmt, weichen mus. Man hefte seine Aufmerksamkeit nur auf die Stelle, wo die Gleichung $r^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{x^2}{4}$ eintrit; und man wird leicht wahrnehmen, daß sich von da aus blos fortcalculiren läßt, bis die Geltung zu x herauskommt; Leichte Formeln-Wendungen führen alles zum Ziel, ohne daß schlechterdings notwendig wäre, neue Hülfs-Linien zu ziehen, und durch erweiterte Zeichnungen die Vollendung des Beweises zu verfolgen.

Aber dieß könnte doch geschehen! Man könnte, in gleichem Schritt hin, graphisch verfaren, wie man nun blos algebraisch verfährt. Seit Des Cartes Zeiten haben sich wirklich verschiedene geschikte Mathematiker bemüht, die Thunlichkeit dieses Geschäfts darzutun,

tun, und allerlei Anſchläge, auch mitunter manche wirklich gute Mittel angegeben, wie man algebraiſche Gleichungen geometriſch conſtruiren könne. Es iſt aber unter ſehr groſſen Männern viele Disharmonie über die Schicklichkeit und den Nuzen dieſer Bemühungen entſtanden, die noch nicht beigelegt iſt. Sehr leſenswürdige Bemerkungen hierüber trägt der ſcharfſinnige Hr. Prof. Schwab von Stuttgart in einem beſondern Aufſaz vor, welchen er ſeiner Ueberſezung von Euklids Datis mit der Aufſchrift: Gedanken über die Analyſis, vorgeſezt hat. — In der Folge etwas mehr hievon! Ich errege hier blos Aufmerkſamkeit auf dieſes intereſſante Süjet!

Sobald das Verhältnis der ganzen Sehne zum Radius gefunden iſt, ſo iſt der regreſſive Act des Verſtandes ſpielend-leicht, auch das Verhältnis der halben Chorde, oder des Sinus zum Radius, (durch ſimple Halbirung) zu beſtimmen; und ſo kommt:

Sin. $60° = \frac{r. \sqrt{3}}{2}$ evident heraus. . . .

§. 6

Wenn man das Verhältnis einiger Polygon-Seiten zum Radius glücklich erforscht hat, (wie uns dieses in den vorigen Blättern, ich meine, leicht genug geglückt ist,) so stellt sich ziemlich natürlich ein Verlangen ein, (worauf schon oben hingedeutet worden,) diese Ausspähungen fortzusezen, und der Gedanke, nach der Reihe, wo möglich die Verhältnisse der Seiten des Fünfecks des Siebenecks, des Acht-Ecks, des Neun — des Zehnecks u. s. f. zum Halbmesser ebenfalls bestimmt zu kennen, hat, meines Bedünkens, schon für sich einen gewissen Reiz, der wohl werth ist, daß man für seine Befriedigung sorge. Aber diese Befriedigung kostet doch um etwas mehr Mühe, als man anfangs ahndet. Man versinkt dabei in tiefe Rechnungen, welche die sonstige Freude an der Analysis oft sehr auf die Probe stellen. Dennoch gelingts dem fleisigen Späher. Die Bekanntschaft blos mit ein paar algebraischen Hauptsäzen, deren wir bisher noch nicht erwähnt haben, erleichtert sonderlich seine Arbeit, auf allen Seiten; und diese Bekannt-

kanntschaft hilft ihm wirklich allzuoft durch, als wirs umgehen könnten, uns dabei geflissentlich einige Blätter hindurch zu verweilen. —

Es läst sich wol bald begreifen, daß, wenn irgend ein Raffinement eine allgemeine Formel ausfindig gemacht hätte, „nach welcher man in jedem Fall, so oft nur das Verhältnis der Seite eines Vielecks (zum Radius) gegeben wäre, unverzüglich das Verhältnis der Seite des verdoppelten *) Vielecks erkennen würde," hiedurch ein ausserordentlich-oft anwendbarer Vortheil geschaft, oder eo ipso vorhanden seyn müßte, mit Gleichförmigkeit unzählig-viele Polygon-Seiten schnell gegen den Halb-Messer zu bestimmen. Eine solche allgemeine Formel ist nun wirklich bereits gefunden, und ihre Richtigkeit unumstöslich erwiesen; Ich stelle den Proceß im Detail so vor:

Die doppelte Menge von n Seiten einer Figur, ist: n + n, oder: 2 n Seiten eines

*) Verdoppelten V. — z. B. wenn die Seite eines Dreiecks bestimmt-gegeben wäre, daraus die des Sechsecks, und aus dieser, die des Zwölfecks zu kennen, u. s. f.

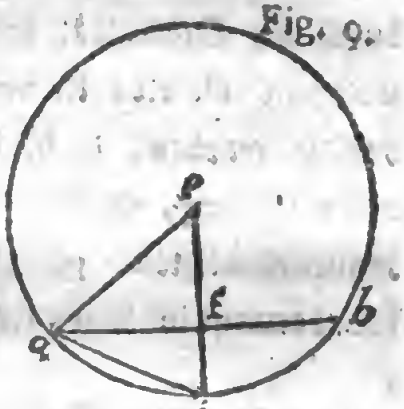
nes Polygons, (das natürlich also auch noch so viel Winkel hat.) Die Seite eines Vielecks von n Seiten sei nun gegeben, nicht nur als anschauliches Object, sondern auch als Zal-Grösse, gegen den Radius = 1 im Verhältnis bestimmt, und C benannt; Da heist nun die Frage: wie findet man hieraus die Seite eines Vielecks, das noch so viel Seiten, als das gegebene, hätte, ebenfalls in einer Zal-Grösse; dem durchaus bleibenden und fest-bestehenden Verhältnis des Radius (gegen die bekannte Seite) gemäs? Man sehe die Figur an! Die Sehne, ab, sei die gegebene Grösse eines Vielecks von n Seiten, und heise als Zal-Grösse: C. (z. B. wenn das Vieleck ein Quadrat wäre, so wäre C = r. $\sqrt{2}$; und n Seiten wären = 4 Seiten.) Hieraus dann, die Grösse der Seite, (ai), eines Vielecks von 2 n Seiten, *) als homogene Zal, zu finden, wäre die Aufgabe. Als ausgedehnte Länge für Intuition ist die Sehne, ai, (als zur Helfte des Bogens gehörig, welchen die gegebene Sehne

ganz,

*) Dem erst angenommenen Beispiel gemäs, wären da 2 n = 2. 4. d. h. 8 Seiten.

ganz einnimmt,) gar leicht in Zeichnung darzustellen. Aber in dem Moment, in welchem sie gezeichnet da steht, ist sie doch sicher, als Zal-Gröse bestimmbar, wie die gegebene grose Sehne, als C, schon bestimmt ist. Diese ihre Zal-Gröse nun genau zu eruiren, ist das vorseiende Geschäft des Analysten .... Sie heise allgemein, (dann einen Namen mus sie doch als Zal-Gröse haben) = Z, wie sie uns in Zeichnung ai heißt. Was wird dieses versteckte Z seyn?

Fig. 9.



ab = C
ai = Z

Auflösung.

Man fällt einen Perpendikel vom Mittelpunct des Kreises, e, aus, auf die gegebene Seite oder Sehne, ab; und zieht ihn fort bis an die Peripherie. Nothwendig entstehen dadurch rechte Winkel zu beeden Seiten, um f; Die ganze Linie, ei, selbst aber ist ein Radius,

da

da sie bis an den Umkreis reicht. Man ziehe noch einen, ae, bis an den Grenz-Punct der gegebenen Sehne; so ist ae = ei = beede = r.

Nun wird die gesuchte Grösse von ai, oder: Z, durch die Quantität dreier verschiedenen Linien, nachdem dieselbe in einen schicklichen Ausdruck versezt worden, d. h. durch Beziehung auf gewisse Grösen, welche zur Vermittlung der Erkenntnis dienen, gefunden. Hiezu ist folgende Sonderung in Gedanken erforderlich:

I) Die grose Sehne, ab, = C, wird als Helfte gedacht: $\frac{1}{2}$ ab = $\frac{1}{2}$ C, und diese Helfte wird quadrirt gesezt; wo sie dann (obiger Vorstellung §. 48. gemäs,) = $\frac{1}{4}$ C^2 heisen, und auch, als Zal-Grösе, verständlich seyn mus, weil die Linie, ab, selbst als Grösе gegeben ist, und C eine bekannte Zal vorstellt.

Offenbar ist diese halbirte Sehne Kathetus in dem rechtwinklichten Dreieck, in welchem ai, oder Z selbst, Hypotenuse ist, wenn alles quadrirt

drirt wird, d. h. $ai^2 = \left(\frac{1}{2} ab\right)^2 + fi^2$

$$Z^2 = \frac{1}{4} C^2 + fi^2.$$

Da wäre dann wol der Werth von Z selbst schon gar deutlich bestimmt, wenn wir nur fi ebenfalls als Zal-Gröse kennten, wie wir C, als solche, kennen

II) Dieses fi ist ein Stück des Radius, ei, das fließt evident aus der oben bemelten Construction, und dieser Radius ist synthetisch = ef + fi; folglich, fi selbst auch, als Differenz vorstellbar r — ef, also wol $fi^2 = (r - ef)^2$. Allein was ist ef, als Zal-Gröse? . . . heißt die weitere Frage. Auf die Antwort hierauf kommt alles an:

III) ef ist Basis in dem obern rechtwinklichten Dreieck, aef, dessen Hypotenuse der Radius, ae, selbst ist, und in welchem als Kathetus, unser bekanntes C ebenfalls vorkommt. Demnach wenn quadrirt worden,

wird

wird $ef^2 = ac^2 - \frac{1}{4} C^2$

d. h. $ef^2 = r^2 - \frac{1}{4} C^2$

Also unquadrirt: $ef = \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$

Es ist demnach bloße Substitution, wenn für fi, oder für $r - ef$, geschrieben wird:

$$r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} = fi$$

Da aber nicht fi, sondern das Quadrat davon in dem gebildeten Gleichungs Saz vorkam, so tritt bei beiden Aequivalenten zu fi^2 das Geschäft ein, eine zweitheilige Wurzel jezt förmlich zu quadriren — *)

Dieß geht so zu: $r - ef$ ist im □ zu denken, und $r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ ebenf. im □

Da wird: $(r - ef)^2 = rr - 2\,r.ef + ef^2$,

Zum Aeq. für $\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} C^2}\right)^2$ kommt aber

$= r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} + r^2 - \frac{1}{4} C^2$

Die-

*) Man mus hiebei immer an die bekannte Formel denken: $(a - b)^2$ ausgesezt als:

$= aa - 2\,ab + bb$.

Dieſes lezte ſo entwickelte Quadrat, als Aequivalent für fi^2, enthält nun lauter bekannte Grösen, welche ſämmtlich gleichſam mit dem Maasſtab des Radius gemeſſen ſind. Denn auch von C und C^2 läst ſich dieſes behaupten, da ja gleich anfangs genommen worden, das Verh. von ab, oder C, zum Halb-Meſſer ſei als bekannt voraus-geſezt. Nehmen wir nunmehr wieder die obige ganze Gleichung $Z^2 = \frac{1}{4} C^2 \pm fi^2$, od. $\frac{C^2}{4} \pm fi^2$, vor die Hand, und rücken den eben jezt gefundenen Werth für fi^2 nur ein; ſo erhalten wir ganz ſicher Z^2 ſo viel als:

$$= \frac{C^2}{4} \pm r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{C^2}{4}\right)} \pm r^2 - \frac{C^2}{4}$$

freilich eine Reihe gehäufter Signaturen, über welchen das Auge ermüdet, oder nahezu irre wird. Der Wunſch, die Formel abzukürzen, iſt daher natürlich; und er kann einigermaſen befriediget werden, weil $\frac{1}{4} C^2$ (vornen) poſitiv, und am Schlus negativ vorkommt, alſo ganz entbehrlich wird: Daher mus dann auch eben ſo gültig ſeyn:

$$Z^2 = r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}C^2\right)} + r^2$$

oder: $2r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}C^2\right)}$,

auch $= 2r^2 - 2r.ef.$

Weil aber endlich die Aufgabe selbst nicht so wol Z^2, als Z allein verlangt, so ist die Qu. Wurzel beederseits abzuziehen, oder bei allgemeinen Zeichen, blos mit $\sqrt{}$ anzudeuten:

$$\sqrt{Z^2} = Z \text{ ist} = \sqrt{\left(2r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}C^2\right)}\right)}$$

$$= \sqrt{(2r^2 - 2r.ef)}.$$

Alles kam also durchhin darauf an, ef, als $= \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}C^2\right)}$, sich immer deutlich vorzustellen, zu welcher Reduction eine leichte Anwendung des Pythagorischen Lehrsazes verhelfen muste.

Die Gültigkeit der gefundenen Formel bestätiget sich nun in jedem Zalen-Exempel, das man aufgeben mag. Da oben schon des Achteck's erwähnt worden, in so fern man dessen Seite aus der Gröse der Viereck-Seite, (als Zal) soll finden können, so wollen wir nun se-

ſehen, wie unſre erörtrte Formel hiezu behülflich iſt.

In der Käſtneriſchen Analyſ. endlicher Gröſen (§. 160) heist es ganz kurz:

„Die Seite des Vierecks iſt r. $\sqrt{2} = C$, alſo: $Z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{2}r^2\right)} = 2r^2 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$." *)

Der Langsdorfiſche (ſonſt gewis ſehr verdienſtliche) Commentar ſchweigt auch ganz bei dieſer Stelle. Um ſo weniger überflüſſig wird folgende Auseinanderſezung ſeyn:

Wir wiſſen (aus obigen Erörterungen,) daß die Seite des Vierecks im Kreis, im Verhältnis gegen den Radius, als Zal-Gröſe $C = r\sqrt{2}$ ſei. Nun heist der Fall: Dieſe Seite ſei für

*) Ich ſeze C, wo durchgehends, f, in den Käſtneriſchen §§. vorkömmt; weil mich dünkt, man verwickle ſich in Ausdrücken, wenn man den einzelnen Durchſchnitt-Punct in der Sehne, ab, wie die Fig. zeigt, f, nennt, alſo auch die halbe Sehne af u. ſ. f, und doch auch die ganze Sehne unter f verſtehen ſoll.

das bekannt und gegeben; daraus werde aber erwartet, Z, oder die Seite des Achtecks, zu eruiren. Dem obigen Ideengang gemäs, mus man sich die Gleichung, $Z^2 = \frac{1}{4} C^2 + fi$, wieder vorstellen, in Ausdrücken vom Halb-Messer hergenommen, $= 2r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ und da wird man bald bemerken, daß gegenwärtig aus unserer Gröse $r. \sqrt{2}$ werden mus, was aus C (allgemein) wurde. Die Helfte von C aber, quadrirt gesezt, war $\frac{1}{4} C^2$, und die Helfte von $(r. \sqrt{2})^2$ wird seyn =

$$\frac{r. \sqrt{2}}{2} \text{ im } \square = \frac{r^2. 2}{4} = \frac{1}{2} r^2$$

so daß in unsrem Fall, die Formel

$2r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ gälte

$= 2r^2 - 2r. \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{2} r^2\right)}$

Da aber der Radius = 1 angenommen wird, hier also $r^2 = 1^2$ ist, 1 aber auch in jeder höhern Potenz, doch nur = 1, (ohne Exponenten) vorstellt und beträgt; so wird dadurch die angezogene Formel gar sehr einfach:

nehm-

nehmlich : $2r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{2}r^2\right)}$

$= 2 - 2.\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$, auch

weil $1 - \frac{1}{2}$, so viel, als $\frac{1}{2}$ od. $\frac{2}{4}$ schlechthin ist,

$= 2 - 2.\sqrt{\left(\frac{2}{4}\right)}$ auch *) $= 2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\right)$

u. hierdurch erhalten wir sicher zur Gleichung:

$= 2 - \frac{2.\sqrt{2}}{2}$ d. i. $2 - \sqrt{2}$ indem ja $\frac{2}{2}$ im

Bruch entbehrlich wird **). Darauf ist dann blos zu subtrahiren:

$2 - \sqrt{2} = (2 - 1{,}4142135659..)$

---

*) Weil das $\sqrt{}$ Zeichen: Zäler und Nenner affieirt.. Mit dem Nenner $\sqrt{4}$ wird man demnächst leicht fertig. Er ist $= 2$.

**) Dieses kommt dann nun mit dem Käſtneriſchen Ausdruck $2r^2.(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ überein. Dann dafür läst sich ja schreiben: $2r^2 - 2r^2\sqrt{\frac{1}{2}}$ d. h. wenn r^2, als $= 1$, weggelaſſen wird:

$= 2 - 2.\sqrt{\frac{1}{2}}$, welches wir so eben enrwickelt sahen, als: $= 2 - \sqrt{\frac{2}{1}}$

d. h. = 0,5857864341 . . . ist = Z²; Folglich hiemit die Seite des Achtecks, wenn sie quadrirt würde, als Verhältnis-Zal (gegen den Radius) gefunden; Wird aber demnächst die Seite, simpel od. unquadrirt, d. h. Z allein, verlangt, so ist aus der vorhandenen Decimal-Grösse nur noch die Qu. Wurzel auszuziehen. Diese ergiebt sich, als
= 0,76536. = $\sqrt{}$ 0,5857864341, und so ist alles aufgelöst und im Reinen. *)

Bei-

*) Wer nachrechnet, wird in den letzten Zalen dieser Decimal-Grösen kleine Verschiedenheiten bemerken, welche von der Erstreckung des Geschäfts beim Wurzel-Ausziehen herrühren, wie weit man nehmlich, über 7 oder 8 Decimal-Stellen fort calculirt. — Ich habe geflissentlich die □ W. aus 2 bis auf 10 Decim. ausgezogen; sonst hätte ich den Beisaz wegen des Sinus sehr schlecht erweislich machen können. Ich würde nehmlich, wenn ich die §. 19 angeführte $\sqrt{}$ 2 blos mit 8 Decimalen beibehalten hätte, nicht 5857864341 (aus 2 — $\sqrt{}$ 2), sondern eine nur in den vordern Ziffern hiermit übereinkommende geringere Zal erhalten haben; Aus der geringern Zal hätte dann auch

Beiſaz. Die Sehne, welche hiemit berechnet worden iſt, ſteht im Kreis notwendig unter einem Bogen von 45°, weil ja $\frac{360}{8} = 45$, und 8 gleiche Sehnen im Acht-Eck vorhanden ſind. Die halbirte Sehne dieſes Bogens iſt ein Sinus und zwar: Sin. 22 Gr. 30 Min... Und ſiehe da! wenn unſre Zal: 0,76536.... halbirt wird, ſo bleibt noch eben die Zal-Gröſe, welche man in den Tafeln bei: Sin. 22° 30′ antreffen wird: 0,38268... (nur, daß die Nulle vor den Zehntheilchen aus oben berührten Gründen wegfällt, in ſofern r = 10 Mill. angenommen wird.)

auch die Wurzel nicht 76535 heiſen können; Folglich würde ſich auch der Sinus nicht ergeben haben, wie er doch in den Tafeln ſteht, als 38268...

Auch bei der □ Wurzel aus 3, die man im 4ten Beiſpiel ausgezogen antrift, iſt dieſe Bemerkung zu wiederholen. Man verſuche es nur, und lege ſelbſt Hand ans Werk; ſo wird man gar ſchnell finden, daß man mit $\sqrt{3}$, wie ſie oben §. 50 angegeben iſt, hier durchaus nicht zur Genüge ausreicht.

Noch ein Beiſpiel, vom Sechs-Eck hergenommen, läst ſich jezt kürzer durchführen: Die gegebene Seite, C, iſt darinn der Grösse des Radius gleich, $C = r = 1$. Die Seite des Zwölf-Ecks ſoll daraus geſucht werden, ſo iſt da ef $= \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)}$ ſo viel, als: $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$; welches abermals als: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$ od. $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ zu betrachten iſt. Nun ſeze man die ganze Formel gehörig durch Subſtitut. aus: $2r^2 - 2r.\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} C^2\right)} = Z^2$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Die □ Wurzel aus 3 iſt alſo von 2 abzuziehen:

2 — 1,7320508099. . . .

= 0,2679491901. . . . = Z^2

Da wäre alſo die Seite des Zwölf-Ecks, quadrirt, gefunden Demnach unquadrirt:

$\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ d. h.

$\sqrt{(0{,}2679491901)} = 0{,}51763. . . . = Z$,

Die ſimple Sehne, Z, oder die Seite des Zwölf-Ecks iſt folglich, im Verhältnis gegen den Radius, ebenfalls eruirt.

Bei-

Beisaz. Zwölf gleiche Sehnen-theilen den Kreis in $\frac{360}{12}$, od. in 30 gleiche Bogen Stücke ab; oder, die Seite des Zwölf-Ecks läuft unter einem Bogen von 30° her. Halbirt man diese Chorde, so hat man:

$$\text{Sin. } 15^\circ = \frac{051762. \ldots}{2}$$

In den Tafeln hat dieser Sinus die Zal: 25881. . . . . wodurch sich die Richtigkeit des Calkuls bewährt. — (Von den alleräussersten Näherungen ist anderwärts die Rede.)

Räsonnement

zu §. 6.

Es bleibt immer ein widriges Schicksal für Algeber, daß ihre gehäufte Signaturen so abschreckend sind, daß der bloße Anblick ihres Kleids oder das Aussehen ihrer Tracht das Vorurtheil gegen sie erregt, sie sei auch im Innern abgeschmackt, und widersinnig. Alle Unkundige sprechen so, und auch, wer Lust an ihr hat, mus eingestehen, daß eine lange Reihe von blos zusammengeketteten Buchstaben und Brüchen beschwerlich durch zu laufen sei.

Aber es ist dem Uebel doch kaum abzuhelfen; jedes andre vorgeschlagene Mittel verleitet zu Weitläuftigkeiten, welchen der Rechner ein für allemal feind bleibt. So bald mehr, als ein Buchstabe für eine Grösse, die oft im Calkul vorkommt, gewählt wird, so werden die Glieder in den Gleichungen zu gedehnt, und wollen nicht mehr für eine Zeile zureichen; darüber geräth man in noch undeutlichern Ausdruck, als man vorher vermeiden wollte. — Indessen scheint es mir doch immer, (ich habe auch darüber mit mehrern verständigen Männern gesprochen,) daß im Räsonnement selbst Haupt-Grösen nicht nur mit Buchstaben, sondern mit ganzen Namen, und zwar, wo möglich, mit bizarren oder auffallenden Namen belegt werden sollen. z. B. über die gegebene Sehne, C, würde unter dem Namen; Comus u. über die gesuchte Z, unter dem Namen: Zeno, in der laufenden Rede, weit eindrüklicher gesprochen werden können, als wenn man wie gewöhnlich, nur, c, und z, sezt. Aber, „was hat dann Comus mit Zeno zu thun?“ (läßt sich wohl dagegen vorbringen,) man darf ja doch keine Neben-Begriffe damit verbin-

binden?“ .... Ich weis wohl, daß sich darüber spotten, auch gleich, als pro aris & focis, für die alte kurze Buchstaben Signatur, fechten läst; Allein, wenns dann doch einmal so ist, daß einer, dem ich gesagt habe: „Diese Linie soll Comus, oder Chabrias, oder Nimrod und diese andre da, Zeno, od. Zaddok od. Saba heisen,“ so oft ich weiterhin wieder auf die nehmliche Linien zu reden kommen, und sie abermals mit den bemelten ganzen Namen ausspreche, daß (sage ich,) mein Schüler oder Unterredner mich besser versteht, und der rechten Vorstellung sich jedesmal schneller erinnert, als wenn ich immer blos von c und z spreche, warum sollte ich dann die Namen nicht vorziehen? — Vielleicht, weil ein alter, (sonst ehrwürdiger) Mathematiker oder ein strenger Recensent mich seltsam schelten möchte? oder, weil mir das Beispiel sehr groser Männer entgegenstünde, welche seit hundert Jaren nicht für gut fanden, sich so weit herabzulassen? ... Dergleichen Befürchtungen sollten mich nicht abhalten, mein für besser erkanntes Mittel zur Verständlichkeit wirklich bei jedem Anlaß in Ausübung zu bringen,

gen,

gen, — wenn nur mehrere Mathematiker desfalls auch einverstanden würden, auf ähnliche Weise sich auszudrücken. Dann einer allein isolirt, kann da nicht viel fördern, wenn er nicht schon allgemein, als Matador in einer gewissen Scienz anerkannt ist.... Indessen werde ich es doch hie und da wagen, meiner einzelnen Ueberzeugung zu folgen. . . . . .

Was unsern §. 61.65 geführten Haupt-Beweiß selbst anlangt, so wird nun wohl deutlich seyn, daß allein die Vorstellung des Radius an zwo Stellen, ac, und ei, und der Gebrauch in der ersten, als Hypotenuse, in der zweiten als Synthesis von 2 Grundlinien zu 2 rechtw. Dreiecken, die Erkenntnis vermittle, und das gesuchte Verhältnis an den Tag bringe. In der That geht wiederum auch hier, (wie oben §.) eine Reduction unter einerlei Benennung, oder Zurückführung auf Gleichartigkeit vor. *) Der progressive Act, den man hiernächst

*) Die Linien, ek, und ki, müssen bestimmte Fragmente von der schon bestimmten Grösse des Radius werden, welches regressiv zugeht.

nächst durch Quadrirung vornimmt, ist gleichsam nur die lezte Bereitung (adaptatio) zur unmittelbar-folgenden Auflösung, weil sich ewig von gleichen Quadraten auf gleiche Wurzeln schliesen läst. — Daß die grose Sehne, absolut, (Comus) als gleichartig mit der Radius in Gröse, anzunehmen, und nach ihm ausgemessen sei, (als 1 : √ 2), ist längst dargetan.

Uebrigens ist nicht zu leugnen, daß es für den menschlichen Verstand mit einiger Beschwerlichkeit verknüpft ist, für den simpeln Ausdruck einer Gröse den complicirten Ausdruck einer Differenz-Gröse (wie fi = r̀ — ef,) sogar oft annehmen, und damit gleichsam manövriren zu müssen. Allein, daß man durch Unterschiebung von dergleichen Aequivalenten zu den wichtigsten Entdeckungen hindurch dringe, ist doch einmal unwidersprechlich gewiß; und daß unsäglich oft gar kein andrer Ausweg, zu einem vorgesezten Ziel zu gelangen, übrig-vorhanden sei, ist ebenfalls ohnzweifelhaft. — Ein paar Zeilen des grosen Algebraikers, de Crousaz enthalten sehr viel, was hierher gehört, in gedrängter Kürze:

Un

Un des grands Soins d'un Algebriſte est: de ſ'accoutumer, à *Subſtituer un Signe à un autre*, (doppelter Zweck) (1) ou, afin de rendre les Calculs moins chargés de lettres, (2) ou, pour faire en ſorte, que les divers Membres, qúil compare, paroiſſent exprimés ſous de mémes lettres. (S. ſein Traité del'Alg. ſ. 189).

Von beeden Hinſichten, und Erfolgen zeugt auch unſer Fall: Durch die gedachte Subſtitutionen kam nach und nach alles unter die Benennung des Halbmeſſers; Und, wenn gleich durch Annahme der Signatur $r^2 - \frac{1}{4} C^2$, für efs, eine Gleichung zu Z^2, ſ. 65 anfangs zum Vorſchein kam, welche wirklich chargée de lettres heiſen kann, ſo erhielten wir doch eben ſelbſt durch Einrückung dieſer Differenz-Formel $r^2 - \frac{1}{4} C^2$ Anlaß, die ganze Gleichungs-Gröſe ſofort gar ſehr abzukürzen, einmal, wegen der Selbſt-Deſtruction von $\frac{1}{4} C^2$, fürs andre, wegen jezt erſt tunlicher Zuſammenſchmelzung des $r^2 + r^2$ in $2 r^2$; wodurch allerdings ein calcul moins chargé de l. glücklich

er-

erzielt wurde. In dem Beiſpiel zum Acht-Eck läst ſich desfalls auch die Geichungs-Grö-ſe: $2\,r^2.\,(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ treffend hier anfüh-ren. Es muste eine andere vorher umſtändlich ausgeſezt werden, nehmlich

$2\,r^2 - 2\,r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{2}\,r^1)}$, welche man ſo-dann nach und nach als $= 2 - 2\sqrt{\frac{2}{4}}$ ken-nen lernte, und endlich gar auf: $2 - \sqrt{2}$, degagiren konnte. Das ſahe man wohl gewiß anfangs der complicirten Gröſe nicht an, . . . daß man auf eine ſo ſimple Signatur hinaus kommen würde, und dennoch gelang es, eben durch geſchikten Gebrauch des Stücks der For-mel: $r^1 - \frac{1}{4}\,C^2$, ...

§. 7.

Da man die Formel gefunden hatte, wenn C, als Seiten Gröſe zu einem Vieleck von n Seiten gegeben war, daraus die Seiten-Grö-ſe eines Vielecks von 2 n Seiten, (Z) zu fin-den, ſo wagte man nun bald auch regreſ-ſive Verſuche, welche nicht weniger gelangen.

Man

Man ſuchte aus Z, als gegeben gedacht, *) die Grösse, C, zu finden; (z. B. aus der Seite des Sechsecks die des Dreiecks, aus der des Zehnecks die des Fünfecks;) und eruirte zu künftigem Gebrauch in allen Fällen die allgemeine Formel hiezu ſo: Zuerſt wurde für Z, oder auch, für Z^2, die gegebene quadrirte Seiten-Grösse, (Zeno) hier wieder ſubſtituirt, und der Form nach als bekannt (I) geſezt:

$Z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{I}{4}C^2;\right)}$ aber

wohl zu merken, dem Gehalt noch, war die zuſammengeſezte Gleichungs-Grösse nur bis $\frac{I}{4}C^2$, bekannt; eben C ſollte ja erſt eruirt werden, alſo wol auch $\frac{I}{4}C^2$; darauf iſt ja die ganze Aufgabe gerichtet. Blos formal ſteht demnach C unter bekannten Grösen drinnen

*) Da gieng man alſo vom kleinen Zeno aus, und ſuchte bis zum groſen Comus zu kommen; d. h. von der Seiten-Grösse einer Figur von 2 n Seiten ſchritte man zu der S. Gr. einer F. von n Seiten. Vorher wars umgekehrt! . . .

nen, der numeriſche Werth deſſelben iſt aber erſt zu beſtimmen. Da mußte dann der Algebraiker allem ſeinem Scharfſinn aufbieten, um C zu iſoliren, d. h. es ganz allein zum Glied einer verſtändlichen Gleichung zu machen, und alle andre Gröſe auf die Gegenſeite hinüber zu bringen. Er benahm ſich deshalb ſo: Durch eine gar leichte Umwendung bildete er (IItens) aus dem Aequivalenten,

$Z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}C^2,)}$ nächſtf. Gleichung

$2r^2 - Z^2 = 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}C^2,)}$ *)

Der

*) Wenn $a = b - c$, [oder $a4 = 3a - 8$] iſt, ſo gewiß immer $b - a = c$, [oder $32 - a4 = 8$]. Das kann ſich wol jeder ſelbſt beweiſen; Er darf nur, wie in der Schule, ſprechen: Iſt $a = b - c$, ſo iſt auch $a + c - b$; Iſt $a + c = b$, ſo iſt auch: $c = b - a$. In unſerm Fall iſt, a, da oben Z^2, und b, da oben a r². u. ſ. f.. — Die Anwendung von alle dem kommt wiederum gleich (ſub IV) vor. Augenſcheinlich iſt, $a + c = b$, der vermittelnde Begriff, durch welchen die Erkenntnis möglich wird, daß: $b - a = c$ ſei, welche der Verſtand aus der allererſten Gleichung; ($a = b - c$) nicht unmittelbar folgern kann.

Der (III)te Act, welchen er dann vornahm, war eine Quadrirung beederſeits.

$$4r^4 - 4r^2Z^2 + Z^4 = 4r^2 \cdot r^2 - \frac{1}{4} C^2,$$

$$\text{oder} = 4r^4 - \frac{4}{4} r^2 C^2,$$

$$= 4r^4 - r^2 C^2.$$

Das erſte Glied, $2r^2 - Z^2$ mußte ja förmlich als eine binomiſche Wurzelgröſe behandelt werden; In dem andern Gleichungs-Glied aber ward, der Form nach, blos $2r$ zu quadriren: $2r \cdot 2r = 4r^2$; von dem 2ten Factor aber das Wurzel-Zeichen ſchlechthin zu beſeitigen; ſo war die Potenz-Erhöhung ganz berichtiget. Durch den lezten Ausdruck kam dann der Analyſt dem geſuchten C ſchon näher. Aber zuvörderſt war noch $r^2 C^2$ zu iſoliren. (IV)ter Act: $4r^4$ wird aus dem hintern Glied in das vordre geworfen; da entſteht:

$$+ 4r^4 - 4r^4 + 4r^2 Z^2 - Z^4 = r^2 C^2,$$

d. h. $$0 + 4r^2 Z^2 - Z^4 = r^2 C^2,$$

welches das nehmliche Verfahren, wie oben (II) vorausſezt.

Vter Act. Div. durch r^2 beederſeits; ſo ergiebt ſich: $\frac{4r^2 Z^2 - Z^4}{r^2} = \frac{r^2 C^2}{r^2} = C^2;$

oder

oder in einem gleich-bedeutenden Ausdruck:

$Z^2 \cdot \left(\frac{4r^2 - Z^2}{r^2}\right)$ ist das □ von C, od. $= C^2$.

Demselben ist dann blos das Wurz-Zeichen vorzusezzen, so hat man: $\sqrt{\left(\frac{ZZ \cdot 4r^2 - Z^4}{rr}\right)}$

oder $\frac{Z\sqrt{4r^2 - Z^2}}{r} = C$

Man hat ein specielles Beispiel, für welches diese Formel zutrift, wenn man unter, 2 n, Sechs (= 2. 3) versteht, und annimmt, es sei aufgegeben, aus der bekannten Seite des Sechs-Ecks die unbekannte des Dreieks zu suchen. Da ist Zeno der Radius selbst, weil ja ein Sechseck notorisch durch Anlegung des Radius blos gebildet wird, also $Z = r$; folglich wird nun C, (Comus) die Dreieck-Seite leicht so gefunden: $\frac{Z\sqrt{4r^2 - Z^2}}{r}$

ist $= C$; aber also auch: $\frac{r\sqrt{4r^2 - r^2}}{r} = C$

eben weil $Z = r$ zu nehmen ist. Vorne aber hebt sich r mit r; also bleibt: $\sqrt{4r^2 - r^2} = C$. welches, wenn im Zäler r^2 würklich subtrahirt

wird, so viel ist, als: $\sqrt{3}\,r^2 = C$; womit wir eben das Aequivalent für die Seite des Dreiecks erhalten, welches wir oben (s. 49.) eben so, oder auch $= r.\sqrt{3}$, erkannt hatten. Ein zweites, meines Bedünkens, wegen der Ausführung, noch viel schöneres Beispiel kommt unten vor, (wenn wir das Zehneck erörtert haben werden,) beim Fünfeck.

Räsonnement

zu §. 7.

Laßt uns bemerken, wie da der Analyst, der C aus Z sucht, in V Acten dieses versteckte C gleichsam verfolgt; Er wendet immer sein Auge darauf, wie auf eine Beute, und verläßt es nie; und ruht nicht, bis ers ganz degagirt, allein, vor sich stehen hat. . . . . Das Resultat in jedem Act ist ein Schluß, welcher allemal blos mittelbar heraus kommt. Im Isten Act erhellet dieses für sich. Der Ausdruck für Z ist ja nur entlehnt, und beziehungsweise gültig. Im IIten Act leuchtet eben das wol jedem ein, der nur die Note s. 81 lesen mag; Ohne den gedachten Mittelbegriff, wel-

welcher, unſrer urſprünglichen Formel gemäs, als nächſte Conſequenz:

$Z^2 + 2r.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}C^2)} = 2r^2$, im Ausdruck heiſen würde, lieſe ſich aus Z^2 und deſſen Aequivalent, nicht unmittelbar das Aequiv. für $2r^2 - Z^2$, das wir dort ſehen, folgern. Im IIIten Act mußten etliche Mittelbegriffe eintreten, ſonderlich der: daß $\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$, und $\frac{4}{4}r^2 = r^2$ ſei Im IVten war die Vermittlung nötig, wie im zweiten, und noch weiter die Reduction zu o aus + und —. Im Vten die Einſicht der Entbehrlichkeit von $\frac{r^2}{r^2} = 1$ bei Mltc. und Diviſion, in ſo fern es nichts in Grôſe alterirt.

Vier concatenirte Schlüße führten alſo zum Haupt-Schluß, von welchen jeder ſich bis auf gewiſſe Proſyllogismen wieder verfolgen ließ, welche der geübte Rechner aber gewönlich unberührt liegen läst. . . . . Uebung kann es hierinn ſehr weit bringen, ſo weit das man auch die notwendige Zwiſchen-Reihe ſehr verwickelter Mittel-Begriffe, nicht mehr achtet,

ihrer im Ausdruck gar nicht weiter erwähnt, ja wol ihres Daseyns sich nicht mehr deutlich bewußt ist! Daher die dunkle Sprache groser Männer; daher die Berechtigung zu der Kürze, mit welcher, zum Beispiel, ein Newton, irgendwo den Calkül blos bis auf die Formel: $\frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{xx} = b^2$ fortführt, und dann sprechen darf: „Damit ist ja x selbst gefunden, und klar schon im Werth vorhanden.“ — Die noch hiezu gehörige Evolutionen sind ihm zu geläufig; er ist seiner Sache aus andern ähnlichen Entwicklungen schon gewiß; dahingegen ein anderer bei dieser Formel das ob? wie? erst nach und nach zu berichtigen hat! . . . .

Sollte es übrigens jemand versuchen, die Ausdrücke des Calküls, (die obige IV Acte hindurch) durch Linien darzustellen, und den Gang des Beweises durch geometrische Constructionen getreu verfolgen zu wollen, so würde derselbe hier ein äuserst mühsames Geschäft übernehmen, nnd sich in beinahe unabsehliche Zeichnungen verwickeln; Der heilsame Erfolg vieler Bemühungen ähnlicher Art ist aber gar

oft

oft die Ueberzeugung selbst von dem vortreflichen Dienst, welchen Algebra durch Kürze und Bestimmtheit gewährt, und von der Geschmeidigkeit, mit welcher sie leicht und sicher wenn man sich nur mit einigen ihren Formeln recht bekannt gemacht hat, auf Resultate von dem ausgebreitetsten Umfang hinausführt, auf welche Zusammensezung intuitiver Zeichnungen nimmermehr für sich hingeleitet hatte... Und da dieser Ueberzeugung noch so viele Freunde bei uns zu wünschen sind, da der Unglaube, daß Algebra in Geometrie viel nüze, noch leider! beinahe allgemein in unsern Schulen regiert, so ist gar wol zu wünschen, daß selbst Misgriffe, und Verirrungen, bei welchen man sich endlich selber zugestehen muß, daß der gehofte Erfolg fehlgeschlagen sei, Anlaß geben mögen, die alten Vorurtheile zu verlassen, und die evidenten Vorzüge der neuen Analyse anzuerkennen. —

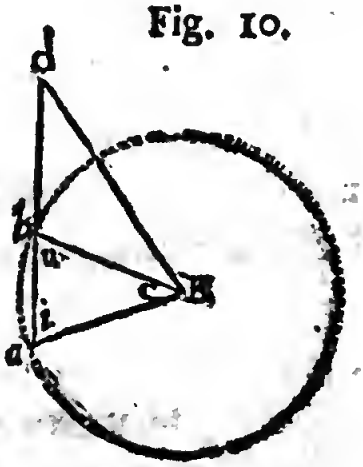
§. 8.

Aufgabe. Das Verhältnis der Seite des Zehnecks, (das in einem Kreis beschrieben steht,) zum Halbmesser des Kreises zu finden.

Die Seite des Zehnecks ist eine Sehne im Kreiß, ab, welche (gegen den Radius) als Zalgröse, uns noch = x ist. Zu eruiren ist demnach eben, was 1 : x, oder 10 Mill. zu x hier sei?

Zuvörderst werden zwo vorbereitende Zeichnungen erfordert, um zum Ziel zu gelangen.

Fig. 10.



Die erste: Man betrachtet die Seite, ab, als Basis eines leicht zu construireuden gleichschenkl. Dreiecks, welches unmittelbar fertig ist, wenn man 2 Radien, vom Centrum aus gezogen hat, ak = bk. Das △ heißt also, abk.

Die zwote: Man zieht die Seite, od. Linie, ab, gerade fort, so daß das angesezte Verlängerungs-Stück, bd, die Länge des Radius erreicht, d. h. r = bk wird; Damit ist ein zweiter gleichschenklichter Triangel, bdk, fertig, (wenn blos vollends, dk, zugezogen worden.) Die unleugbare Gleichheit der Radien beweist die Gleichheit der Schenkel von selbst.

Nun

Nun wird über die Winkel dieser 2 gleichschenklichten Dreiecke, (die weder gleich-gros, noch einander ähnlich sind,) wie folgt, räsonnirt; —*)

I) Die Seite des Zehnecks unterfängt, als Chorde, einen Bogen von 36°, notwendig, als 360° : 10. Dieser Bogen ist das Maas des Centri-Winkels, c, im Scheitel des kleinen Dreiecks, abk. Der Ausdruck

$\frac{360°}{10} = \frac{4R}{10} = c$, muß also gültig für diesen Winkel seyn, weil notorisch das Maas von 4 rechten Winkeln (4 R) gleichbedeutend mit 360 Graden ist. Statt $\frac{4R}{10}$ gilt kürzer: $\frac{2R}{5} = c$.

II) Weil das △ gleichschenklicht ist, so sind die Winkel auf der Basis gleich, $u = i$; In Beziehung auf den bekannten ganzen Gehalt

*) — Um heraus zu bringen, (dann ich will mit Fleiß sogleich den Zweck und den Erfolg setzen!) daß das grose Dreieck, adk, das Ensemble der 2 gleichschenklichten, dem kleinern von denselben, abk, ähnlich sei.

eines jeden △, der = 2R ist, fehlt aber natürlich u und i noch der Scheitelwinkel, c, zu diesem Totalgehalt; d. h. u ✣ i ✣ c ist = 2R, folgl. u ✣ i = 2R — c, od. = 2R — $\frac{2R}{5}$, dem allererst eruirten Aequiv. von c gemäs, Durch Reduction unter eine Benennung aber ist:

$2R - \frac{2R}{5} = \frac{5.(2R) - 2R}{5}$ d. h. $\frac{8R}{5} = u \text{ ✣ } i.$

III) Weil u = i ist, so gilt auch die Gleichung: $\frac{8R}{5} = u \text{ ✣ } u$, oder = i ✣ i. Ist aber der doppelte Wink. von u = $\frac{8R}{5}$, so mus der einfache: = $\frac{4R}{5}$ seyn, und ein gleiches für den einfachen Winkel, i, statt haben: d. h. $\frac{u \text{ ✣ } u}{2} = u$ ist: $\frac{\frac{1}{2}8R}{5}$ d. h. = $\frac{R4}{5}$, und ebenso i = $\frac{4R}{5}$.

Welches sich auch in der Zusammenstellung bewährt, wo

c ✣ u ✣ i . . . . . = 2R

$\frac{2R}{5} \text{ ✣ } \frac{4R}{5} \text{ ✣ } \frac{4R}{5} = \frac{2 \text{ ✣ } 4 \text{ ✣ } 4}{5} = \frac{10R}{5} = 2R,$

die

die Richtigkeit des Verfahrens doch gewiß erprobt.

IV) Wenn man c mit u in diesen Ausdrücken vergleicht, so zeigt sich c offenbar nur halb so gros, als u, weil ja $\frac{4R}{5}$ doch sicher noch so gros ist, als: $\frac{2R}{5}$; d.h. u = 2c, und i = 2c ebenfalls, oder: erst der doppelt-gedachte Centri Winkel käme einem der zwei Winkel auf der Grundlinie gleich.

V) In dem andern gleichschenkel. △, bkd, sind die Winkel auf der Basis, dk, ebenfalls gleich, d = k. Als äuserer Wink. steht aber diesen beeden, u, (im kleinern △) entgegen, und ist dann beeden im Werth gleich zu achten, u = d + k, oedr auch jedem verdoppelten, weil sie ja selbst gleich sind; d. h. u = 2k = 2d. Halbirt man beederseits, so mus auch gelten: $\frac{1}{2}$ u = k = d.

VI) Für die Helfte dieses Winkel des Basis, (oder für $\frac{1}{2}$ u) läst sich aber auch der Centriwinkel, c, setzen, (nach nr. IV.) d. h.

c =

$c = \frac{1}{2} u$; demnach ist c auch so gros, als jeder der 2 W. in dem obern △, bdk, $c = d = k$. Hiemit sind alle Data vorhanden, um zu beweisen, daß das kleine △, abk, und das grose, adk, (welches die 2 durchgeforschte kleinere befaßt,) ähnliche Dreiecke seien. Ihre Winkel im Scheitel sind ja gleich, $c = d$, der Winkel, i, ist beeden gemein, und die Seite, ak, ebenfalls in beeden dieselbe. Wenn man demnach das kleine △, abk, heraus hübe, in das grose hinein rückte und Scheitel auf Scheitel legte, so würde ak mit ab paralel laufen, (als Bases) und die Seite, ad, würde mit ak, homolog, oder gleichnamig seyn, d. h. Die proportion träte notwendig ein:

ak:	ab	=	ad:	ak;
Die Basis im grosen △	zur Basis im kleinen	=	wie die dran liegende Seite im grosen:	zur dran l. S. im kleinen.

Jezt erst trit Algebr ein. In Rückerinnerung auf das Obige werde die Linie ak und bd, schlechthin mit = r, ausgedrückt; (welches wol angeht, da ja beede Linien die Länge des Halbmessers haben müssen) und für die zu suchen=

chende Seiten-Gröſe, x, geſezt; (x = ab.) Hiedurch verwandelt ſich die erſtgeſezte Proportion durch ſimple Unterſchiebung dieſer Signaturen in die nächſt ſtehende, r : x = x + r : r. Daraus führen nun folgende Acte zum Ziel:

I) Das Product der äuſ. Glieder iſt, dem P. der inn. gleich: rr = x (x + r),
oder: $r^2 = xx + xr$; od. auch $r_2 = x^2 + xr$.

II) Wo der Algebraiker nur eine ſo gebildete Formel ſieht da weis er ſchon, daß eine unreine quadratiſche Gleichung aufzulöſen ſei. Er addirt zu $xx + xr$ noch $\frac{1}{4} r^2$, u. ſieht dann das Quadrat der binomiſchen Wurzel:
$(x + \frac{1}{2} r)^2 = xx + xr + \frac{1}{4} r^2$ vor ſich.
Dem andern Glied der Gleichung, (in nr. I,) nehml. r^2, fügt er dann ebendieſes $\frac{1}{4} r^2$ bei; ſo ſteht hiemit beederſeits ergänzt:
$x^2 + xr + \frac{1}{4} r^2 = r^2 + \frac{1}{4} r^2$ als ein reines oder vollkommenes Quadrat. Demnach auch noch in der (zweytheiligen) Wurzel:
$x + \frac{1}{2} r = \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} r^2)}$. Für den leztern

Aus-

Ausdruck gilt aber auch $= \sqrt{\left(\frac{4}{4} + \frac{1}{4} r^2\right)}$

d. h. $= \sqrt{\frac{5}{4}} r^2$.

III) Nun ist x gar leicht vollends zu eruiren; Es ist in Gleichung vorhanden, wenn $\frac{1}{2} r$ beederseits abgezogen wird; d. h.

$x = \sqrt{\frac{5}{4}} r^2 - \frac{1}{2} r$. Damit ist die gesuchs Gröse der Zehneck-Seite, ab, dann selbst gefunden, und offenbar in Theilen oder Fragmenten des Halbmessers ausgedrückt; Denn, $\sqrt{\frac{5}{4}} r^2 - \frac{1}{2} r$, ist doch gewiß eine der Gröse des Radius gleichartige Gröse, wie sie ja auch durchaus Benennungen nach ihm, (und aus ihm gebildet) trägt.

Was man demnächst ferner mit diesem erforschten Werth: $\sqrt{\frac{5}{4}} r^2 - \frac{1}{2} r$. vornimmt, ist blos Entwicklung, und Simplificirung zur Bequemlichkeit des Zalen-Rechners. Da sezt man dann:

$\sqrt{\frac{5}{4}}\, r_2 - \frac{1}{2} r$ ist $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} r^2 - \frac{r}{2}$,

d. h. $\frac{\sqrt{5}. r}{2} - \frac{r}{2}$, od. $\frac{\sqrt{5}. r - 1 r.}{2}$ woraus sich endlich formirt:

$\frac{r. \sqrt{5} - 1}{2}$, oder $r.\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = x.\right.$

In Zalen ist die Qu. Wurzel aus 5, mit 7 Decimalen: = 2,2360679 Folglich:

$\sqrt{5} - 1 = 2{,}2360679 - 1$, d. h. $= 1{,}2360679$

Halbirt ist: $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}6183391\frac{1}{2}$

oder: $0{,}6183^{0}39 = x.$

So gros ist demnach die Seite des Zehnecks, im Verhältnis gegen den Radius, wenn dieser $= 1$ gesezt ist; Ist derselbe aber als 10 Mill. angenommen so ist das Verhältnis dann so:

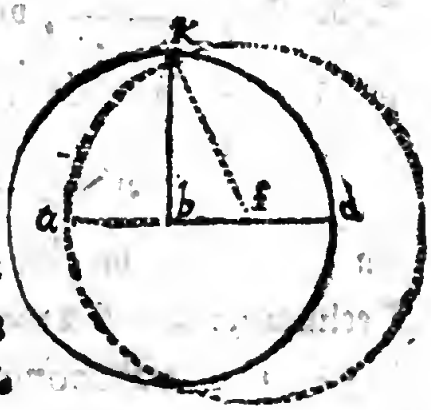
$x : r = 618339 \cdot : 10$ Millionen.

Diesen Erforschungen, insoferne sie namentlich die Hauptformel, $r^2 + \frac{1}{4} r2$ enthalten, ist folgendes geom. Constructions-Verfahren unmittelbar bei zufügen. Man stelle unsern bisherigen Radius, bk, als Perpendikel, an das

Ende

Ende einer Linie, bf, welche gerade halb ſo gros, als der Rad. ſei,

Fig. II.



ſo iſt bk = r, u. bf = $\frac{1}{2}$ r

Dem rechten Winkel, an b, gegenüber, läuft die Hypoten kf. Man ſehe dieſelbe, als den Radius eines andern gröſern Zirkels an, deſſen Centrum, f, wäre, und denke ſich demnächſt denſelben abwärts ſich drehend, bis a, ſo mus er doch natürlich da noch ſich ſelbſt gleich ſeyn, d. h. af = kf. Jezt concatenirt man folgende Schlüſſe:

1) Die Hypotenuſe, kf, quadrirt gedacht, iſt: = bkq + bfq = kfq, oder da bk = r iſt, und bf = $\frac{1}{2}$ r, auch: = $r^2 + \frac{1}{4} r^2$

2) Beederſ. die Qu. Wurzel ausgezogen, giebt $\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} r^2)}$ = kf, wofür ſich, erwieſener maſen ſezen läst: = $\sqrt{\frac{5}{4}} r^2 = x + \frac{1}{2} r$

3) Zieht man von dieſer Gröſe die Helfte des Ra-

Radius ab, (in der Figur, bf, $= \frac{1}{2}$ r,) so erhält man gerade die schon hinlänglich eruirte Grösse, (im Calkül) $= \sqrt{\frac{5}{4}\ r^2} - \frac{1}{2}\ r = x$; und in Linien, für Intuition: $=$ kf — bf $= x$; oder af — bf $=$ ab.

Beisaz. Wir kennen die ausgespähte Seite, als Chorde, welcher ein Bogen von 36° $=$ 360 : 10. im Kreis correspondirt:

oder: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618339 = x$

Die Helfte dieser Chorde giebt den Sinus zu 18 Grad. obigen Vorgängen gemäs; Also:

Sin. 18° $= \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}3090169. = \frac{1}{2}\ x$;

welches zutrift, wenn man die Sinustafeln aufschlägt, nur daß (aus bekanntem Grund) die lezte Zifern um 1 höher stehen.

Räsonnement

zu §. 8.

Es ist mir jederzeit vorgekommen, der menschliche Wiz könne sich auf die Art der Auflösung, welche wir nun, als Beantwortung

der Frage wegen des Zehnecks, kennen, wirklich viel zu gute thun. Ich glaube, es ist erlaubt, einen gewissen Stolz zu fühlen, wenn man nach und nach zu der hellen Einsicht der verketteten Gründe, welche bei diesem Problem unsern Geist beschäftigen, gelangt ist, und am Schluß — gleichsam mit siegendem Blick die Reihe der errungenen Evidenzen schnell durchlaufen kann. Jünglinge sollten frühzeitig auf den Reiz solcher süssen, und gewiß nicht unedlen Empfindungen aufmerksam gemacht werden, von deren bloser Existenz — — viele verständige Leute im Alter sich dann nicht mehr überzeugen lassen. Es ist kaum glaublich, wie sehr aus Ideenbeschränktheit oft hierüber gespottet wird! . . . .

In den vorigen Erforschungen hatten wir überall recht-winklichte Dreiecke nötig, um zum gewünschten Zweck jedesmal zu gelangen; In der gegenwärtigen aber mußten wir blos zu der Vergleichung zweier spizw. und zugleich gleichschenklichten △ unsre Zuflucht nehmen, u. uns von deren Aehnlichkeit (abk ∽ adk) überzeugen. Hierzu waren 6 Verhandlungen, oder 6 besondere Reflexions-Acte, erforderlich; u.

dann

dann noch dazu der Act der Imagination, welcher Scheitel auf Scheitel, und Schenkel auf Schenkel legte, und dadnrch zur der Einsicht qualitativer Einheit verhalf. Wir müssen das gröfsere Dreieck im kleinern, gleichsam in Miniatür, wieder finden, und für ebenso qualificirt wieder erkennen; eben die Verbindung der Theile, eben das Anschliefsen gleichnamiger Seiten muß anschaulich vorhanden seyn; und daß es vorh. sei, wird aus der beweislichen, (auch oben bewiesenen) Gleichheit der Winkel allemal notwendig ersehen. —

Die viergliedrichte Proportion, wie sie oben detaillirt gesezt wurde, war demnächst nur entwikelte Sprache dieser Aehnlichkeit, oder, successiv-evolvirter Ausdruck derselben.

Nun aber stellt sich Algeber ein. Da wird dann zuvörderst der Schenkel, ad, in dem grosen Dreieck, der in Anschauung in eine Linie zusammenfloß, durch Uebertragung der vorhin ventilirten Begriffe, und deren Recognition, nun wieder synthetisch betrachtet, als x + r; und jezt ist alle Anschauung der Figur selbst, von nun an bis ans Ende hin, dem Auge entrückt; dafür aber wird mit der spielend-leicht-

gebildeten Gleichung, $r^2 = x^2 + xr$, fortan activ operirt. . . . Aufrichtig zu reden ists gröstenteils eine glückliche Erinnerung, welche zu der Auflösung, die nun schon ganz nahe ist, so gar sehr förderlich wird, die Erinnerung, durch algebraische Künste, wer weis, wann? . . . gelernt zu haben, „wie die Synthesis eines in die zweite Potenz erhöhten Binomiums beschaffen, und wenn etwa irgendwo ein Stück dazu fehlte, wie dasselbe zu ergänzen sei?“ Die Gleichförmigkeit dieser Ergänzung, öfters in Vorstellung wiederholt, prägte wol notwendig ein gewisses Bild der Formel ein, das nun im gleichem Fall sich reproducirt; u. wol um so eher sich bei jedem reproduciren dürfte, welchem etwa sein Lehrer bei Entwicklung einer zweitheiligen Wurzel die Hochwichtigkeit ihrer Gestalt selbst mit nachdrücklichen Mementos anempfohlen haben möchte.

Was nüzte auch Algeber, wenn man die oft so theuer ihr abgewundene Resultate nicht mit Sorglichkeit stets vorrätig zum Gebrauch aufbewahrte, und dann würklich zu rechter Zeit immer damit vorrückte? . . . .

Uebrigens iſt leicht zu bemerken, daß, wenn man die Glieder der Proportion: r: x = x + r:r ſo ſtellt: x + r : r = r : x, damit der Radius, als Mittelproportionale, erſcheine, welches auch mit der Zeichnung in Linien übereintrift, wenn man Figur 11 betrachtet, wo ab + bd : bd = bd : ab, auch ab + bk : bk = bk : ab, iſt

Aus ebenderſelben Zeichnung läst ſich aber auch eine nicht weniger intereſſante Proportion deduciren, in welcher die Seite des Zehnecks, ab, als Mittel-Proportionale ſelbſt, erſcheint. — Es dürfte wol anderwärts näheres Licht hierüber von mir verbreitet werden. . . . Hier — kann und will ich blos noch einen Wink hin werfen für den Aethetiker, in Rükſicht auf die bemerkungswürdige Simplicität, welche bei der geometriſchen Conſtruction (ſ. 96.) ſtatt hat. Man gelangt dadurch ſo unerwartet ſchnell zum Zweck, daß die plözliche Erſcheinung des Reſultats wirklich die Seele überraſcht; — welches ſich beſſer empfinden, als beſchreiben läst.

§. 9.

Laßt uns jezt regreſſiv gehen, und aus der gefundenen Seiten-Gröſe des Zehnecks, die des

Fünfecks eruiren. Wir erinnern uns an die Auflösung der allgemeinen Frage: (§. 7) wie aus 2 n zu suchen sei: n? Was dort Z hies, ist hier unser gefundenes, x, und die Seite des Fünfecks wird also hier zur grosen Sehne, C. Was ist dann nun in Zalgröse dieses C? heist demnach die Frage.

Der erste Act, welchen wir mit Z vorgenommen hatten, war Quadrirung; Auch last uns dann x, und dessen Aequivaleut: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$, quadriren. (Ister Act) $x^2 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}r^2$ welches, wenn 5 und + 1 zusammengerückt wird so viel ist, als: $\frac{6-2.\sqrt{5}}{4}r^2$ oder $= \frac{3-\sqrt{5}}{2}r^2$, weil der Werth eines Bruchs ganz ungeändert derselbe bleibt, wenn man Zäler und Nenner mit einer ganzen Zal, hier mit 2, dividirt.

IIter Act. Obiger Vorstellung (s. 81) gemäs mus jezt die Formel, $2r^2 - Z^2$, eintreten, hier als: $2r^2 - x^2$, und im Aequivalent: $2r^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}r^2,\right)$ od. unter einen Nenner

ner gebracht: $= \frac{4 - 3 \mp \sqrt{5}}{2} r^2$

III)ter Act. Dieſe Quadrirung ausgeſezt, iſt: $4r^4 - 4r^2 \cdot x^2 \mp x^4 = 4r^4 - r^2 C^2$, immer noch $= \frac{4 - 3 \mp \sqrt{5}}{2} r^2$, weil ja $r^2 - x^2$ nur formal ſich verändert hat.

IV)ter Act. Daraus folgt $4r_2 \cdot x^2 - x4 = r^2 C^2$; wofür ſich aber auch ſezen läst: $x^2 (4r^2 - x^2) = r^2 C^2$. Allein in Zalen Gröſe? .... erhält man das Aequivalent hiezu durch die Erwägung, daß, wenn zu der Gleichung: $2r^2 - x^2 = \frac{4 - 3 \mp \sqrt{5}}{2} r^2$, beederſeits $2r_2$ addirt wird, ſie ſodann heiſen müſſe:

$2r^2 - x^2 \mp 2 \cdot r^2 = \frac{4 - 3 \mp \sqrt{5}}{2} r^2 \mp 2 \cdot r^2$;

od. $4r^2 - x^2 = \frac{8 - 3 \mp \sqrt{5}}{2} r^2$,

d. h. $= r^2 \cdot \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}$ und daß alſo Aequiv. ſeien:

$x^2 (4r^2 - x^2) = x^2 \left(\frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} r^2 \right)$

d. h. (nach nr. 1) $= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} \cdot r^4$,

auch noch $= r^2 C^2$.

V)ter Act. Div. durch r^2 beederſ.; ſo ergiebt ſich,

(da $\frac{r^4}{r^2} = r^2$ iſt,) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{2} r^2 = C^2$;

oder, wenn in der erſten Formel wirklich *) multiplicirt wird:

$$\frac{10 - 2.\sqrt{5}}{4} r^2 = C^2;$$

In noch kürzerem Ausdruck, wenn abermals, wie oben nr. 1, Zäler und Nenner mit 2 dividirt werden, $\frac{5}{2} - \frac{1.\sqrt{5}}{2} r^2$,

d. i. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} r^2 = C^2$.

Damit iſt die geſuchte Seite, oder Sehne, in ſofern ſie quadrirt gedacht wird, wirklich gefunden; folglich, unquadrirt, die Seite des Fünfecks, oder C ſelbſt, iſt vorhanden, wenn die □ Wurzel ausgezogen wird:

d. h. $r. \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = C$,

auch $= r. \frac{\sqrt{(10 - 2.\sqrt{5})}}{2}$

Um

*) Das Product der Zäler hieſe ja (explicite:)

$15 - (\sqrt{5}.\sqrt{5}.) + (3.\sqrt{5}) - (5.\sqrt{5})$

d. h. $15 - 5 + (3 - 5).\sqrt{5}$, od. $= 10 - 2\sqrt{5}$

Um dieſe irrationale Gröſe in Zalen, (wenigſtens äuſſerſt nahe hin) auszudrücken, verfährt man ſo: Man nimmt zuerſt:

$\sqrt{5} = 2{,}236067977497\ldots$ (mit 12 Decimalen alſo;)

Dieſe Qu. Wurzel-Gröſe, doppelt genommen, giebt: $2.\sqrt{5} = 4{,}472135954994.$

welche Zal, von 10 abgezogen, im Auswurf läst: $10 - 2.\sqrt{5} = 5{,}27864045006$;

die Qu. Wurzel hieraus gezogen, giebt:

$\sqrt{(10-2\sqrt{5})} = 2{,}351141\ldots$ ſehr nahe hin;

Folglich kommt C, in ſo ferne es

$= \frac{\sqrt{(10-2.\sqrt{5})}}{2}$ r, iſt, in Zalen zum Vorſchein: $\frac{2{,}351141\ldots}{2}$ r. $= 1{,}175570.$ r. $=$ C;

als womit dann das Verhältnis dieſer Sehne, oder Lateral-Gröſe des Fünfecks gegen den Radius zur Genüge beſtimmt iſt; Wenn der leztere $= 1$ iſt, ſo iſt die Seite des Fünfecks in demſelben Kreis 1 und noch $\frac{1}{10} + \frac{7}{100}$ u.ſ.f.

Eine ſehr leichte Gleichung, welche ſich aus zwo Formeln, die wir nun ſchon kennen, zie-

hen läßt, führt zu einer geometrischen Construction selbst hin, welche wir hier ja nicht umgehen dürfen: Wir dürfen die Gleichungs-Gröse zu C^2, nehmlich: $\frac{10-2.\sqrt{5}}{4} \cdot r^2$ natürl. auch so schreiben: $\frac{6-2.\sqrt{5}}{4} \cdot r^2 + \frac{4r^2}{4} = C^2$

Aus dem Isten Act unsrer Untersuchuag wissen wir aber, daß $\frac{6-2.\sqrt{5}}{4} \cdot r^2 = x^2$ sei; Schiebt man also dieses gültig-anerkannte Aequivalent unter, so wird $x^2 + \frac{4r^2}{4}$, d. h. $x^2 + r^2 = C^2$;

Mit Worten ausgedrückt: Das Quadrat unsrer Seite des Fünfecks, C^2, ist so gros, als das Quadrat der Seite des Zehnecks, x^2, und das Qu. des Radius, r^2, zusammen genommen, od. = dem Qu. des 10 Ecks + dem Qu. des 6 Ecks. So gros, als diese zwei Quadrate, ist aber die quadrirte Hypotenuse, ak, wenn man in der leztern Fig. 11. eine Sehne unter den Bogen, ak, zieht; zuverlässig muß ja dieselbe, quadrirt, da stehen, als $ab^2 + bk^2$; das heist aber eben: $x^2 + r^2$ ist $= C^2$; und so läßt sich die Seite des Fünfecks jedesmal äusserst leicht verzeichnen, so bald man nur den Radius (als

Per-

Perpendikel,) mit dem halben Radius, r mit $\frac{1}{2}$ r, wie oben beim Zehneck, rechtwinklicht zusammen gestellt hat.

Beisaz. Die Seite des Fünfecks unterfängt, als Chorde, 72 Grade;
Dann 360 : 10 ist = 72°. Die Helfte dieser Chorde ist : Sin. 36°; Also $\frac{C}{2} = \frac{1,175570.}{2}$ = 0,587785; welche Zal mit der zutrift, die in den Tafeln steht.

Räsonnement.

zu §. 9.

Die Haupt-Säze dieser Erforschungen sind nur Anwendungen der allgemeinen Formeln, auf welche wir, oben §. 7, nach und nach gerathen waren. Ein besonderer Fall soll da eine abermalige Probe abgeben, ob im allgemeinen, durch jene V Acte des Verstandes hindurch, richtig geschlossen worden sei. Und Erfahrung bestätigt dann auch die Richtigkeit der obigen Deduction wirklich; bestätigt, daß man sich gar allerdings auf das Paradigma (s. 80-83) sicher verlassen könne. . . . .

Die

Die Ueberzeugung (in diesen und ähnlichen Fällen) daß alles so herrlich eintrifft, wenn von welt-umfassender Allgemeinheit zu speciellen Auflösungen herunter oder hinüber geschritten wird, ist keine der geringsten Freuden, welche dem Algebraiker sein Studium verschaft, — — und die ihm doch so oft und viel Ungeweihte . . nicht einmal glauben wollen. Das mögen sie! . . . . So werden sie es dann auch wol nicht glauben, daß eben in unserm Beispiel, (um auch noch eines individuellen Zugs hiebei zu erwähnen!) die Wendung der Formel: $4r^2x - x^4$ in $x^2(r^2 - x^2,)$ und der schnelle Gebrauch derselben (im IVten Act,) allerdings noch dem Analysten eine ganz besondere Freude gewähre, die ihm gleichsam nur unterwegs zu Theil wird, und die doch gewiß sehr bedeutend ist. Denn die Formel ward nicht blos aus Spielerei so gedreht und verkürzt; Er sieht den grosen Vortheil der dadurch erleichterten Rechnung, die Sicherheit des Calküls, von da an, ganz evident, und bewundert dann den Scharfsinn dessen, dem diese Wendung etwa zum erstenmal einfiel, mit vollem Recht, mit wahrhaftiger Vergnügung

und

und innerer Geistes-Behaglichkeit, die der Unwissende immerhin verlachen mag! —

§. 10.

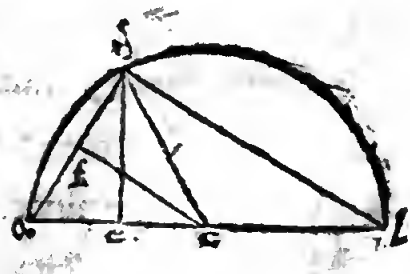
Wir kennen jezt das Verhältnis des Radius zu der Seite des Dreiecks, des Vier-des Fünf-des Sechs-des Acht-des Zehn-des Zwölfecks, und wissen nun hinlänglich, wie sich dem Paradigma, §. 6 u. §. 7 gemäs, hieraus die Verhältnisse zu sehr vielen Polygon-Figur Seiten eruiren lassen. Aber das Verh. des Rad. zur Siebeneck-Seite, zur Neuneck- zur Eilf- zur Dreizehn- zur 15 Eck-Seite läst sich doch nicht auf dem bisher betretenen Weg ausforschen; es gehören hierzu noch besondre in den bisherigen §§. gar noch nicht gelehrte Kenntnisse, namentlich Bekanntschaft mit den Auflösungen der Probleme, wie man den Sinus der Summe zweier Bögen aus den einzelnen Sinussen der Bögen, und die Chorde der Summe zweier Bögen aus den einzelnen paralelen Chorden, u. s. w. findet. Allein ich kann mich in diesen Blättern, deren Zal absichtlich klein seyn soll, hierüber nicht ausbreiten! Blos einige Haupt-Rücksichten auf das, was

Sinus der Summe heist, und auf vorzügliche daraus erforschbare Aequiv. für jeden Sinus überhaupt kann ich hier noch in speciele Betrachtung nehmen. Alles wird sich nach und nach genau an unsre Erörterungen des 1sten und 2ten Syhen anschliessen.

§. 11.

Wir beschäftigten uns (S. 1 — 22) mit den zwei Segmenten des Diameters, und dem Perpendikel darauf, oder mit dem Sin. vers. rad ✝ cos, und mit dem Sin. rectus selbst. Jede dieser drei linearischen Grösen läst sich, als 4tes Glied einer geom. Proportion, wie folgt, ansehen, wenn man blos in Fig. 2. noch ein paar Linien einzeichnet, und damit einige Schlüsse verbindet: Man fälle nehmlich auf die Chorde, ad, einen Perpendikel, cf, vom Centrum aus; sie ist damit halbirt: af = fd, und die ganze Sehne ist synthetisch = af ✝ fd; Jede dieser Helften ist auch

Fig. 12.



als

als ein Sinus zu betrachten, und zwar zu dem getheilten Bogen, ad, welchem dann auch der getheilte Winkel, d. h. $\frac{1}{2}$ acd, correspondirt, der Figur nach auch = acf, als = $\frac{1}{2}$ c Der Cosinus ist da, fc, beederseits hin. Gerade noch so gros, als dieser Cosinus ist die grose Chorde, dl; Denn der Winkel, d, am Halbkreis ist doch gewiß ein rechter W. (s. oben §. 1. s. 3.), der bei f gleichfalls, weil fc, ein Perpend. ist; folglich läuft fc paralel mit dl; und wenn dann, vom Centrum aus, auch auf die grose Chorde, dl ein Perp. gefällt würde, so könnte es gar nicht anders seyn, als daß dieselbe demnach gleichgetheilt, d. i. $\frac{1}{2}$ dl, auch = fc, und, im Stand gegenüber, gerade so lang, d. h. dem Cosinus gleich seyn müßte. (Auch darum, weil △ afc ∽ adl ist, und es unsinnig wäre, zu leugnen, daß im ersten △ die Seite, af, die Helfte der homologen Seite, ad, im andern △ sei; desgleichen, daß ac, die Helfte der homol. S. al, in eben dem andern △ sei! Schlusfolgl. aber zwischen der Dritten in beeden △, doch

doch notwendig ebendas Verhältnis ſtatt haben, d. h. fc = $\frac{1}{2}$ dl ſeyn mus.) Alſo iſt auch für dl zu ſezen: = ſ2 cf. Nun argumentirt man ſo:

I) Da (auſſer den gedachten ähnlichen Dreiecken) auch △ ade ∽ acf ſind, weil der Winkel, a in beeden gemein, und e = f, (als ad perp.) ſind, ſo ergiebt ſich, eben aus ihrer Aehnlichkeit, nach Vergleichung der homologen Seiten, die Analogie:
ac : af = ad : ae; oder in trigonometriſchem Ausdruck: 1 : Sin. $\frac{1}{2}$ c = 2 Sin. $\frac{1}{2}$ c : 1 — cos. c
Im lezten Glied iſt offenbar der S. v. = ac — ec, oder die Differenz Gröſe des Radius und Coſinus gemeint. Da das erſte Glied dieſer Proportion, (r = 1) nicht wirklich dividirt, ſo wird blos das Product der mitt. Gliedern, das Aequivalent für das lezte; d. h.

Sin. $\frac{1}{2}$ c. × 2 Sin. $\frac{1}{2}$ c. = 1 — cos c. = Sin. v.

wofür aber, colligirt, geſezt wird:

= 2

$= 2(\text{Sin. } \frac{1}{2} c)^2$ (*) Welcher Werth sehr wol merken ist!

II) Unser Dreieck, acf, ist aber auch einem andern Δ in der 12 Fig. ähnlich; nehmlich acf $\sim$ edl; (eben weil afc $\sim$ ade, und die Aehnlichkeit zwischen $\Delta\Delta$ ade und edl, nach S. 3 in §. 1 erwiesen ist.)

Da gilt dann die Prop.: ac : cf = dl : el, od. in trig. Ausdruck: $1 : \text{Cos } \frac{1}{2} c = 2 \text{ Cos } \frac{1}{2} c : 1 + c$. oder die Summe des Radius und Cosinus hat zum Aequiv. das Product der mittl. Glieder:

$2 (\text{cos } \frac{1}{2} c)^2 = 1 + \text{cos. } c.$

III)

---

*) Dieser Ausdruck leuchtet nicht immer gleich ein; Aber man stelle sich nur $2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} c$ successiv vor, als: $\text{Sin. } \frac{1}{2} c + \text{Sin. } \frac{1}{2} c$, und denke sodann den Factor: $\text{Sin. } \frac{1}{2} c$, wie er in beede Gröſen multiplicirt, so kommt doch gewiß heraus:

$(\text{Sin. } \frac{1}{2} c)^2 + (\text{Sin. } \frac{1}{2} c)^2$, welches dann colligirt wird in: $2 (\text{Sin. } \frac{1}{2} c)^2$. Eben so verfährt man in nr. II.

III) Eben in dieſen 2 ähnl. Dreiecken haben dann auch die 2 andern homologen Seiten die Analogie: ac : af = dl : de, oder:

1 : Sin. $\frac{1}{2}$ c = 2 Cos. $\frac{1}{2}$ c : Sin. c. Folglich iſt der leztere Sin. c, ſynthetiſch betrachtet, = 2 (Sin. $\frac{1}{2}$ c. Cos $\frac{1}{2}$ c). Mit Worten: Jeder ganze Sinus läst ſich betrachten, als ein zweimal geſeztes Product „ſeines helftigen Coſinus, mit ſeiner eigenen Helfte multiplicirt.“ oder, als das Duplum ſeines heftigen Coſinus, mit ſeiner eigenen Sinus-Helfte mltcirt. .... Eng ſchliest ſich das damit ſelbſt bewieſene Theorem an: „Daß ſich überhaupt jeder Radius zum Coſinus eines Bogens verhalte, wie der doppelte Sinus zum Sinus des doppelten Bogens. ac : cf = 2 af : de; Denn im andern Ausdruck iſt das eben ſo viel, als:

1 : cos $\frac{1}{2}$ c = 2 Sin $\frac{1}{2}$ c : Sin. c; wo das Product der mitt. Glieder das nehmliche, wie nr. III iſt; wie jeder wol einſieht, der nur weis, daß z. B. x. 2 y = 2 y. x, jedes = 2 x y im Product ſei.

Rä-

Räsonnement

zu §. 11.

Hiemit hätten wir zu den drei Grösen, welche wir gleich anfangs in sonderlichen Betracht genommen hatten, drei Werthe gefunden, welche aller Aufmerksamkeit würdig sind.

Durchgehends wird zuvörderst der Radius, welcher immer als das erste der 4 Proportions-Glieder vorkommt, mit einer gewissen linearischen Grösе verglichen, gleich im Isten Saz, r : Sin. $\frac{1}{2}$ c, oder ac : af, d. h. es wird erwogen; wenn in beeden Grösen eine gewisse Menge gleichartiger Theilchen angenommen würde, die man mit Zalen ausspräche, in welchem geom. Verhältnis dieselben gegeneinander stünden? wie oft die Grösе des Radius die andre kleine begreiffen möge? Dieser Exponent, (dann was ist das Resultat dieser Vergleichung anders?) wird nun auch auf die zwei lezten Glieder der Prop. ad : ae übergetragen, oder zwischen denselben erfordert; (Sonst hätten ja die zwo Verhältnisse gar nicht die gesezte Analogie; der Fall der Proportion wäre gar nicht vorhanden.) Und eben so

ists mit nr. II und III. Auch kommt eben das heraus, wenn man das erste Glied mit dem 3ten, das 2te mit dem 4ten in Verhältnis sezt. Der Radius ist immer die erste und ganz wesentliche Vergleichungs-Gröse. — Und doch sieht man dieselbe gar nicht in den Schluß-Resultaten, oder in den Werthen für die lezten Glieder? Allerdings ist es eine Licenz, über welche in einem gewissen Betracht Sinnlichkeit und Verstand sich zu beschweren wol Anlaß haben, daß man, (auf deren Unkosten gleichsam,) blos um die algebr. Formel conciser darzu stellen, den hochwichtigen Radius im Ausdruck dieser Werthe gar wegläst, und nur jene Producte zur Gleichung für den Sin. Vers. für 1 ✠ cos, und für den Sinus selbst hinsezt. Allein diese Licenz ist rechtlich, weil ac = r = 1 angenommen wird, die übrigen Glieder ebenfalls blos Zahlen sind, und 1 doch weder in Mltc. noch in Division etwas alterirt. Weshalb dann auch sowol $\frac{af. ad}{r}$ als af. ad, oder $2 (\text{Sin } \frac{I}{2} \text{ c})^2$ den Sin. V. oder ae ausdrückt.

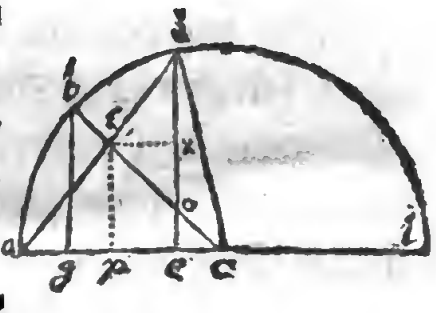
Ferner folgt aber auch aus der Ansicht der Prop. daß, wenn man das lezte Glied mit den

dem 1ſten im Product betrachtet, und das Prod. der mittl. Glieder dagegen hält, jede der 3 erforſchten Gröſen für ſich ſelbſt ſchon die Gröſe des Gleichung-Products erreiche, weil 1 auch da nicht mitcirt. Wodurch dann begreiflich wird wie man jedes dieſer Reſultate, und ſonderlich den Sinus bald einen Quotienten bald ein Product heiſen könne.
(af. ad = ae. r = ae, iſt alſo mit dem obigem, und ſchon §. 3 deducirten Quotienten-Ausdruck wol zu behalten.) Mit dieſer Sprache der Bequemlichkeit, mit dieſer Convenienz der Zeit- und Papier-Erſparniß mus man alſo immer wol einverſtanden ſey, um nicht in Misdeutungen zu gerathen, welche blos vermieden werden, wenn man das ſtillſchweigend pactirte Subintellige immer hiebei in Gedanken ſich vorſtellt, wodurch man allein allen Zweifeln und Anſprüchen ſinnlicher Intuition, inſoferne dieſe immer etwas Meßbares haben, und nachmeſſen will, befriedigend begegnen kann.

Daß Sin. c, und deſſen Aequiv. auch als Sinus der Summe zweier Bogen vorſtellbar ſeie, wird ſich ſogleich im nächſten §. zeigen.

§. 12.

Wenn wir einen Bogen nicht gerade in der Mitte, sondern ungleich theilen, und annehmen, die zwei einzelnen Sinus, und Cosinus seien mit dem Radius bekannt und gegeben, so läst sich, da die zwei Bogen ab + bd den ganzen Bogen ad, als eine Summe, ausmachen der Sinus dieser Summe, de, so in Zeichnung, und dann als Verhältnis Zal gegen den Radius, eruiren: Fig. 13



Er wird graphisch zusammen gesezt aus zwei Stücken, xe + dx, betrachtet, und jedes dieser Stücke, als 4tes Glied einer geom. Proportion, wie folgt, erwiesen: 1) Aehnliche Dreiecke sind: cfp ∽ cbg; die homologen Seiten geben die Analogie: cb : bg = cf : fp; Statt fp, der paralelen Hülfs-Linie gegen xe, läst sich aber xe auch selbst sezen; also ist

$$cb : bg = cf : xe, \text{ und } xe = \frac{bg \cdot cf}{cb}$$

II) Aehnliche Dreiecke sind weiter: cbg ∽ coe; ferner: coe ∽ fox; (in dem ja in beeden ein rech-

rechter W. und ein vertical W. vorkommt;) ferner fox ∽ fdx, folglich auch △ cbg ∽ fdx; Demnach geben die gleichnamige Seiten die Analogie: cb : cg = df : dx; also $dx = \frac{cg.\ df,}{cb}$ Damit iſt der (ſynthetiſche) Sinus der Summe, de ſelbſt erforſcht. In beeden Haupt-Formeln iſt, cb, Diviſor, d. h. der Radius ſelbſt; folglich bleibt er im Calkül, als r = 1 gar weg, und man ſezt ſtatt: $\frac{bg.\ cf}{r} + \frac{cg.\ df}{r}$ ſchlechthin: bg. cf + cg. df; mus aber doch, immer dabei ſich mit dem Gedanken tragen, die Formel habe den verſteckten Sinn: I) Der Radius verh. ſich zum Sinus des untern Winkels, (r : bg,) wie der Coſinus des obern Winkels zum untern Fragment des groſen geſuchten Sinus, (cf: xe.) Und II) der Radius verhalte ſich zum Coſin. des untern Winkels, (r : cg,) wie der Sinus des obern zum übrigen Fragment des groſen geſuchten Sinus, (df : dx.) Erſt dieß vorausgeſezt, iſt die Regel für den mechaniſchen Rechner, als gültig zu ſtatuiren: Bringe durch Calkül ſchlechthin die zwei bemerkte Producte ans Licht, und addire ſie, ſo haſt du den Sinus der Summe;

Im erſten Product kommt ein Sinus als der eine Factor vor, aber ſein zugehöriger Coſinus iſt nicht ſein Mitfactor, ſondern der Coſinus, welcher in der Figur den andern Sinus angeht; und ebenſo verhält ſichs mit dem zweiten Product. — Dieſe notwendige Verwechſelung veranlaßt die Structur der viel bedeutſameren Formel, als bg. cf. ✠ cg. df, iſt, nehmlich: Sin A. Cos B ✠ Cos A. Sin B = Sin C, wo man alſo unter bg den Factor Sin A, unter df den Sin B zuverſtehen hat; folglich unter cg den Cos A und unter cf den Cos B. Der groſe Sinus der Summe, de, aber erhält den kurzen Ausdruck: Sin C. Die neue Formel ſelbſt ſieht nun ſehr einfach aus; Ihr Gebrauch iſt aber äuſſerſt mannichfaltig. Vergleicht man mit ihr die Syntheſis des Sin. c im vor §. nr. III, ſo zeigt ſich bald, daß es wol vergönnt ſei, ſtatt der conciſen Formel, welche wir dort im Product erſahen, ausgeſezt unterzuſtellen,

Sin. C = Sin A. Cos B ✠ Cos A. Sin B.

Sin. c = Sin $\frac{I}{2}$ c. Cos $\frac{I}{2}$ c ✠ Cos $\frac{I}{2}$ c. Sin $\frac{I}{2}$ c,

welche Summe doch gewiß nicht mehr beſagt, als:

als: 2 Cos $\frac{1}{2}$ c. × Sin $\frac{1}{2}$ c, das heist eben 2 (Sin $\frac{1}{2}$ c. Cos $\frac{1}{2}$ c) Demnach ist Sin c. allerdings auch als Sinus der Summe vorstellbar; und da jeder Bogen sich, als aus 2 Bogen gebildet, denken läst, so ist auch jeder Sinus als Sinus einer Summe gedenkbar.

Räsonnement
zu §. 12.

Ich wiederhole, was ich oben, s. 21, von der billigen Vorliebe für ähnliche Signaturen, wie hier Sin. A. Cos B statt bg. cf sind, gesagt habe. Die Sprache wird weit eindringlicher; der Verstand findet weit mehr Nahrung dabei, und die Begriffe haften zu anderweitem Gebrauch viel fester. . . . . Aber mich dünkt eben, man würde doch noch mehr für Erinnerung und Gedächtnis sorgen, wenn man auch da ganze Nahmen sezte —

Den geführten Beweis selbst betreffend, so sieht man daraus abermals, wie wichtig es wol ist, früh mit dem, was Aehnlichkeit in Dreiecken heist, und mit sich bringt, bekannt

zu seyn. Die Stellung mit vertikal-Winkeln, wie nr. II. coe ∽ fox, wird, dünkt mich, Anfängern viel zu selten vorgehalten.

Das Fortrücken von einem ähnlichen △ zum andern, und die dadurch erzielte Combination zweier, deren Analogie nicht unmittelbar einleuchten wollte, und dann doch einleuchtet, führt übrigens etwas erfreuendes bei sich, od. veranlaßt eine gewisse Geistes Behaglichkeit die abermals den Aesthetiker angeht, — und die ich hier blos berühren kann. —

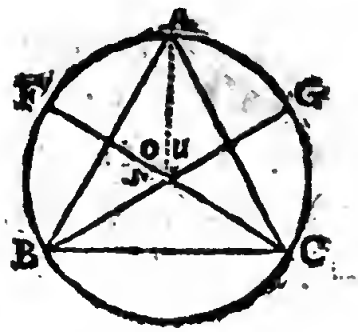
§. 13.

Die Anwendung der erforschten Formel für den Sinus der Summe wird dem Analysten am interessantesten, nach Vorausschickung des Lehrsazes: „Daß sich in jedem △ die Seiten gegen einander verhalten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.“ Dieser Lehrsaz wird kurz so bewiesen: Das im Kreis eingezeichnete Dreieck zeigt drei Peripherien-Winkel, deren Maas bekanntlich nicht der ganze Bogen zwischen den geöfneten zwei Schenkeln, sondern nur die Helfte dieses Bogens ist. Notwendig hat also z. B. der Wink. B eben das Bogen-

maas,

maas, wie der Centri-Winkel, u; folglich hat er auch deſſen Sinus; Dieſer aber iſt $\frac{1}{2}$ AC die Helfte der Chorde des doppelten Bogens. Desgleichen iſt für den Periph. W. C, wie für den gleichen Centri W. o oder s, der Sinus $\frac{1}{2}$ AB, ebenfalls die Helfte der Chorde des dopp. Bogens. Alſo in Vergleichung ſind, Sin B: Sin C = $\frac{1}{2}$ AC: $\frac{1}{2}$ AB,

Fig. 14.



BC = m
AC = y
AB = n

und da alle Helften ſich verh. wie ihre Ganzen, auch Sin B: Sin C = AC: AB, d. h. wie die entgeg. ſt. Seiten, AC: AB. Leichteraachtlich gilt derſelbe Schluß auch für die übrige Winkel u. Sinus in dem △. Natürlich iſt alſo auch: Sin A: Sin B = BC: AC, und Sin A: Sin C = BC: AB. Jezt nenne man die Seiten, wie unter der Fig. 14. angemerkt ſteht, kurz n, m, y; ſo ergeben ſich die Proportionen: (I) m: y = Sin A: Sin B, (II) y: m = Sin B: Sin A.

Sin

(III) m : n = Sin A : Sin. C. Hieraus erhält man Aequivalente für jeden Sinus, als leztes Glied einer geom. Prop. die so heisen:

$$\frac{y.\ \text{Sin A}}{m} \quad ; \quad \frac{m.\ \text{Sin B}}{y} \quad ; \quad \frac{n\ \text{Sin A}}{m}$$

ll ll ll

Sin B Sin A Sin C

Nun beginnt der rüstige Algebraiker gar bald sein Werk; Nur mit einer Vorstellung mus er noch zuvörderst vertraut seyn.

§. 14.

Der Sinus des spizen Winkels wird immer so gros angenommen als der Sinus des stumpfen, welcher auf dem Diameter darneben liegt; z. B. S. 11 Fig. 4 ist Sin acd = Sin dcl, weil man blos auf die Differenz gegen den Quadranten allgemein Rücksicht nimmt, und beim stumpfen W. allemal eben soviel Ueberschuß über das Bogenmaas von 90° vorhanden ist, als viel dem spizen W. dazu (zu 90°,) gebricht, (das en plus ist dem en moins gleich.) Also wird fest angenommen, es seien durchaus unter jedem Halbkreis, folglich unter dem Bogen von 180 Grad auf dem Diameter 2 gleiche

Si-

Sinus vorhanden. Nun haben die drei Winkel eines Dreiecks ebenfalls den Halbkreis zum Maas, und werden mit der bekannten Gleichung: = 2 R = 180°, gedacht; lassen sich auch durch geometr. Construction, als Centriwinkel, wie in der Figur s + o + u = 2 R darstellen. Bezieht man also Sin C auf den Winkel s, und den zugehörigen Bogen BF, so ist natürlich für Sin A und B blos der übrige den Halbkreis ergänzende Bogen, FAG, (der die Winkel o + u = A + B befaßt,) noch vorhanden, welcher aber keinen grösern Sinus haben kann, (weil o + u eben den stumpfen Winkel ausmachen) als Sin C selbst; Und wenn dann Sin C, als Sinus der Summe, gedacht wird, oder als Sin A. Cos B + Cos A. Sin B, so ersieht man wohl, daß die übrigen zwei Seiten des Dreiecks eben hiezu verwendet werden, und gleichsam drauf-gehen, um den Sinus des stumpfen Winkels, (der dem Sinus des spizen, oder Sin C, wie gedacht, allezeit gleich ist,) auszumachen, d. h. daß bei jedem vorkommenden Dreieck Sin C = Sin A. Cos B + Cos. A. Sin B gesezt werden könne, und die zwei andern Sin. und Cosinus den Sinus der Summe, der Formel gemäs, abgeben.

Jezt

Jezt schiebe man 1) die Aequivalente für die Sinus, welche wir als 4te Glieder der Proportionen formirt hatten, blos unter: so erhält man:

$$\text{Sin } C = \text{Sin A. Cos B} + \text{Cos A. Sin B}$$

$$\frac{n.\text{ Sin A}}{m} = \frac{m.\text{ Sin B.}}{y}\text{ Cos B} + \text{Cos A.}\frac{y.\text{ Sin A}}{m}$$

2tens) Div. man allerseits mit Sin A, so zeigt sich:

$$\frac{n.\text{ Sin A}}{m.\text{ Sin A}} = \frac{m.\text{ Sin B. Cos B. y}}{y.\quad\text{Sin B. m}} + \frac{\text{Cos A. y. Sin A}}{m.\text{ Sin A.}}$$

wofür aber kurz sich sezen läst:

$$\frac{n}{m} = \text{Cos B} + \frac{\text{Cos A. y}}{m},$$

Wird alsdann 3tens) beederseits mit m multiplicirt, so kommt heraus: $n = m\,\text{Cos B} + y.\,\text{Cos A}$; d. h. die Summe dieser 2 Producte giebt die Seite, n, oder Latus AB.

Man ziehe 4tens) y. Cos A beederseits ab, so bleibt. $n - y.\,\text{Cos A} = m.\,\text{Cos B.}$

5tens) quadrire man beede Glieder; so hat man: $nn - 2\,ny.\,\text{Cos A} + y^2.\,\text{Cos A}^2 = mm.\,\text{Cos B}^2$ oder wenn man die zwei lezte Cosinus durch die Differenz des Rad. und Sin. ausdrückt: $nn - 2ny.\text{Cos A} + y^2(1 - \text{Sin A}^2) = mm.(1 - \text{Sin B}^2)$; und dann, wenn man für den Sinus B, seinen Werth, wie nr. 1 einschreibt:

$nn \ldots + y^2 (1 - \mathrm{Sin}\,A^2) = m^2 \left(1 - \frac{\mathrm{Sin}A^2\, y^2}{m^2}\right)$

od.: $n^2 \ldots + y^2 - y^2 \mathrm{Sin}A^2 = m^2 - y^2 \mathrm{Sin}A^2$.

6tens) addire man beederseits y^2, Sin A^2; so bleibt der Werth für m^2 allein:

$n^2 - 2ny.\mathrm{Cos}\,A + y^2 = m^2$; und wenn verfahren wird, (wie S. 81 in der Note,) folgt daraus:

$n^2 + y^2 = m^2 + 2ny.\mathrm{Cos}\,A$; weiter:

$n^2 + y^2 - m^2 = 2ny.\mathrm{Cos}\,A$, daher dann:

$$\mathrm{Cos}\,A = \frac{y^2 + n^2 - m^2.}{2ny}$$

§. 15.

Da stehen nun für den Werth des Cosinus von A auf der Gegenseite blos Signaturen von Seiten-Grösen; Daher ist diese Erforschung sehr wichtig; Sie führt darauf, wie man blos aus den gegebenen Seiten eines △ die Winkel alle finden kann. . . .

Wir werden nun sogleich mittelst eben dieser Formel neue Aequivalente für die 3 Grösen, von welchen wir, von §. 1 an, ausgegangen waren, eruiren: nehml. für 1 − Cos, für 1 + Cos, und für den Sinus selbst; Zuerst trette hier 1 + Cos in die Reihe:

Ist

auch hier heraus kommen, wenn man die 2 gefundene Gleichungs-Grösen mit einander mltcirt: nehmlich:

$$\frac{(y+n+m)(y+n-m)}{2ny} \times \frac{(m+y-n)(m-y+n)}{2ny}$$

als $= (1 + \text{Cos } A) \times (1 - \text{Cos } A) = \text{Sin } A^2$.

Man erhält dann:

$$\frac{(y+n+m)(y+n-m).(m+y-n)(m-y+n)}{4n^2y^2} = \text{Sin } A^2$$

Wird endlich aber beederseits die Qu. Wurzel ausgezogen, so bleibt:

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+n-m).(m+y-n)(m-y+n)}}{2ny} = \text{Sin } A;$$

Räsonnement.

zu §. 13. 14. 15.

Es ist unbeschreiblich, wie sich, so bald wir diesen Weg durchmessen haben, der Kreis unserer Blicke erweitert! Schon, wenn der Beweiß des Lehrsatzes §. 13 vollendet ist, läst die Aussicht sich etwas ahnden. Aber sie wird wirklich vast, ja unübersehlich, wann wir durch die Reihe der Mittelbegriffe, die in §. 14 stehen, bis zu der ausgespähten Gleichung für Cos A vorgedrungen sind, von wo aus nur noch we-

nige Schritte zur homogenen Erkenntnis der Haupt-Gleichungen für den Sin. vers. für r + Cos, und den Sinus selbst, sind. — Das Maas des Himmels und der Erde kommt dadurch in des Menschen Gewalt, wenn nur wenige Ausbildung weiter hinzugetan wird. Diese Blätter sind nicht bestimmt, auch über diese stolze Idee zu commentiren; ..... Ueber die erwähnte Mittelbegriffe habe ich noch einiges beizufügen; (Ich verstehe darunter die Säze, §. 14.) Erstens, über die angenommene Grösen-Gleichheit des Sinus im spizen und stumpfen Winkel. Die Vorstellung dieser Gleichheit will selbst Männern von vielem Verstand oft nicht in den Sinn, weil sie ein für allemal an die 2 verschieden-grose Bogen, und Winkel denken. Allein man halte sich nur an den Haupt-Gedanken, daß doch der Sinus, als Perpendikel, die Annäherung zum Sinus Totus eben so gut, als die Entfernung. (den Lauf) über denselben hinaus bestimme, oder auf der Stelle, wo er steht, anzeige, welches sich auch in der Figur bestätigt, wo man sich immer den stumpfen Winkel FAG auch = BFA vorstellen darf, dessen Bogen bis an

die

die Stelle hinreicht, wo kein andrer Perpendickel, als der erstere wieder, statt haben kann. Also ist derselbe Sinus Kanon für den einen, wie für den andern Bogen. Zweitens, geht die Vorstellung anfangs schwer ein, daß die Sinusgröse der 2 übrigen Dreiecks-winkel, zum Sinus der Summe als Gleichung für Sin C jederzeit benüzbar seyn soll. Hr. Hofr. Käſtner sezt kurz: „Weil ein Winkel mit den beeden andern 180° ausmacht, so folgt
Sin C = Sin A. Cos B + Cos A. Sin B.“ Vielleicht hellen die Vorstellungen, welche ich §. 14 angebracht habe, das, was manchem bei dieser Stelle noch dunkel scheinen möchte, auf. Auch erinnre man sich, (aus §. 12) daß man doch ja jeden Bogen synthetisch betrachten kann, so daß sich zwei Sinus nebst den Cosin. drunter hin zeichnen lassen, welches beim spizen wie beim stumpfen Winkel mit gleicher Befugniß statt haben mus, weil.. dieselbe gleiche Rechte haben.

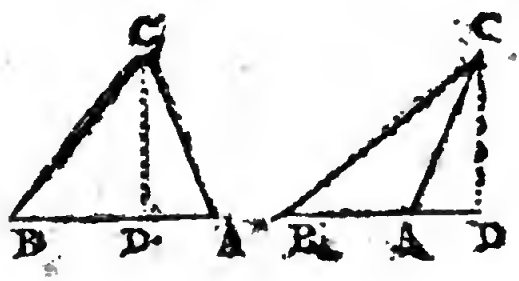
In §. 14. kommt die scheinbar-schwerste Stelle nr. 2 vor. Vornen und hinten wird wirklich in den dortstehenden Formeln Sin A, als Divisor gebraucht und eingeschrieben, in der Mitte aber der Werth dafür, aus nr 1,

und zwar umgekehrt, d. h. Zäler und Nenner wechseln ihren Stellen, weil $\frac{m.\text{Sin. } B}{y}$ ein Bruch ist, und doch dividiren soll. Der Act wird dann durch Mltc. verrichtet, vermittelst der bekannten Umkehrung. . . . Und siehe da! wie schön hebt sich dadurch alles, bis auf Cos B; Der immer bleiben darf und soll! —

§. 16.

Ein andrer Weg, als der war, den wir §. 13 — 15 gegangen sind, um Cos A, und dann auch Sin A selbst zu erforschen, ist folgender: Wenn man die beigesezte 2 Figuren betrachtet, in deren einer der Perpendikel, CD, innerhalb des Dreiecks, der andre ausserhalb, herabfällt, so läst sich aus obigem §. 3 leicht abnehmen, daß, da der Sinus für den Winkel, A, immer als ein Quotient, 1 : Sin A, sich schreiben läst, diesem Verhält-

Fig. 15



hältnis in beeden Figuren die Linien AC : CD correſpondiren, und alſo ſicher ſich die Analogie denken laſſe: AC : CD = 1 : Sin A; Eine ähnliche Analogie folgt für Sin B, oder es mus auch bei ihm ſtatt haben: BC : CD = 1 : Sin B. Sezt man dieſe zwo Poropetionen, wie folgt, unter einander,

AC : CD = 1 : Sin A.
CD : BC = Sin B : 1.

ſo ergiebt ſich AC : BC = Sin B : Sin A

ſehr leicht daraus, in dem man nach dem techniſchen Ausdruck perturbate & ex aequo verfährt, und bekannte Wechſel-Beziehungen eintreten läst. Hierdurch geräth man aber gleichſam unvorſezlich uud mechaniſch auf den oben §. 13 erwieſenen Lehrſaz ſelbſt, und erhält damit eine neue Probe ſeiner Richtigkeit; (Die Sin. der Wink. in einem △ verh. ſ., wie die gegenüber lieg. Seiten.) II)tens fließt aus dieſer Prop. die Gleichung AC. SinA = BC. SinB, als Producte der äuſ. und innern Glieder; mit obigen Buchſtaben geſchrieben:
y. Sin A = m. Sin B. wobei ich blos Hrn. Prof. Klügels Worte wiederhole: „Weil der Sin. eines ſtumpfen Wink. gänzlich derſelbe

mit dem Sin. des spizen Complements ist, so läst die Rechnung ebenfalls das unbestimmt, was die Geometrie nicht entscheidet.“ Eine andre Gleichung ergiebt sich (III) aus der aller-ersten Proportion: AC : CD = 1 : Sin A, für CD, welches, da 1 nicht multiplicirt, dem Product der äuſ. Glieder gleich seyn muß; d. h. AC. Sin A, oder y. Sin A = CD. Hiedurch werden wir von neuem berechtigt, da der Perpend. CD den Sinus zugleich vorstellt, jeden Sinus, nicht nur, als einen Quotienten, sondern auch als ein Product mit einem Radius anzusehen, oder anzuerkennen, daß immer r. Sin = Sin. sei.

IV) In beeden Figuren ist, der gewöhnlichen Sprache nach, die Linie, AD, der Cosinus des Winkels, A; da sie aber zu dem nehmlichen Radius, zu welchem der Sinus, gehört, und eben so gut Verhältnis-Gröse gegen denselben, also gewiß jedesmal r. Cos = Cos. ist, so muß auch hier die Gleichung statt haben: Cos AD = y. Cos A; und dieses Product für den Cosinus fortan gültig seyn.

V) In sofern der Figur gemäs, AD sich auch als Fragment der ganzen Linie, AB, ansezen, sich

sich also auch von derselben in Abzug bringen, d. h. als Subtrahend betrachten läst, folgt ferner daraus die Gleichung: BD = AB — AD, in einen bedeutsamern Ausdruck: = n—y.CosA. Wir benüzen denselben sogleich! . . . Die Seite BC in beeden Figuren ist ohnleugbar, als dem rechten Winkel, D, gegenüber, Hypotenuse, folglich quadrirt, oder, BC^q, mus seyn = CD^q + BD^q; Wenn aber die eingeführten kleinen Buchstaben, und die erst gefundene und damit ausgedrückte Gleichungen gebraucht werden, nach welchen BC = m, CD = y. SinA, und BD = n — y. Cos A, angegeben waren, so ergiebt sich, nach vorgängiger Quadrirung, die Gleichung: BC^q oder mm,
= (yy. $SinA^2$) + (nn — 2yn.CosA. + yy.$CosA^2$,) indem n—y. Cos A hier als eine in die 2te Potenz erhobene zweitheilige Wurzel behandelt wird; (wie oben s. 64 auch vorkam.) Diese chargirte Gleichuugs-Gröse wird einfacher, wenn man bedenkt, daß, yy Factor mit $Sin A^2$, und auch mit $Cos A^2$ ist, daß yy.Sin^2 + yy.$CosA^2$ so viel heise, als (Sin^2 + $Cos A^2$). yy, dieses Product aber nicht mehr besage, als: (1). yy, d. h. als yy allein, weil immer Sin^2 + $CosA^2$ = 1

oder r^2 gilt, wie wir schon aus §. 2. S. 14. ersehen haben.*) Demnach heist jezt viel kürzer der Werth von BC^2 od. $m^2 = yy + nn - 2yn\,Cos\,A$, der', wie ein ausgeseztes Qu. aus einem Binomium, geschrieben: $= y^2 - 2yn.Cos\,A + n^2$; Diß ist aber ebendasselbe Resultat, welches wir oben §. 14. s. 127 für m^2, heraus gebracht hatten; woraus dann ferner die Gleichung zu Cos A sich ergiebt, ganz natürlich, wie sie dort angegeben ist.

Räsonnement
zu §. 16.

Hiemit sind wir auf zwei Wegen zu einem und demselben Ziel gelangt. Den ersten scheint Hr. Hofr. Kästner, den zweiten Hr. Prof. Klügel vorzuziehen. Beede sind lehrreich, und verdienen, gekannt zu seyn. — Auf beeden

*) Graphisch genommen, ist ja jeder Radius als Hypotenuse, der Sinus aber als Kathetus, und der Cosinus als Basis vorstellbar; Folglich, dem Pythag. Theorem gemäs, $r^2 = Sin^2 + Cos^2$, oder der quadrirte Halbmesser ist die Summe dieser 2 Quadrate.

den kommt man an Stellen, wo das ganze Verfahren stocken, und der Calkül gar unvollendet bleiben müßte, wenn man sich nicht durch Differenz-Grösen, und deren Quadrirung eine weitere Bahn zum Ausgang bräche. Ich bitte desfalls nr. 5 in §. 14, mit nr. V in dem erstgesezten §. 16 zu vergleichen. Für zwei Cosinus werden dort Differ. Grösen eingerückt; hier für BD die Werthe, die auf dem vorigen Blat zu lesen sind. Man gehe auch auf §. 6 zurück, und verbinde die Erörteruugen S. 65, mit dem, was ich S. 77 gesagt habe.

Auf der Reise selbst, auf der ich mich geflissentlich weder hier noch §. 14 aufhalten wollte, geräth man übrigens auch nur im percursorischen Lauf, auf interessante Erscheinungen das heist hier, auf Formeln, welche unvermutet für sich ganze Probleme, die dem speculativen wie den praktischen Geometer wichtig sind, auflösen. So giebt 1stens die Formel. §. 14. nr. 4 nehmlich: $n = m.\mathrm{Cos}B \mp y.\mathrm{Cos}\,A.$ zu erkennen, daß die 3te Seite in einem △ gefunden werde, wenn man die zwo andre, jede mit dem Cos. des Winkels, der an ihr liegt, multert. 2tens) die Formel $m^2 = y^2 \mp n^2 - 2yn\ \mathrm{Cos}\,A.$

(ebendd.) nr. 6 verräth, wie die dritte Seite aus den 2 andern, die mit dem eingeſchloßnen Winkel gegeben ſind, gefunden werde; 3tens) für die Gleichungen zu 1—Cos. c und zu 1 ✝ Cos c die wir oben §. 11 erhalten haben, als =

2 $(\text{Sin}\frac{1}{2}\text{ c})^2$ und 2$(\text{Cos.}\frac{1}{2}\text{ c})^2$, werden durch die neue Aequivalente in §. 14, auch neue Werth-Ausdrücke veranlaßt; nehmlich der Werth von 2 $(\text{Sin}\frac{1}{2}\text{ A})^2$ iſt jezt hier = 1 — Cos A, auch (nach S. 188) = $\frac{(m \pm y - n)(m - y \pm n).}{4ny}$

Alſo wird auch ſeyn, (wenn alles halbirt wird,

$\frac{1 - \text{Cos A}}{2} = (\text{Sin}\frac{1}{2}\text{ A})^2 = \frac{m \pm y - n.m - y \pm n}{4ny}$

Folglich $\text{Sin}\frac{1}{2}\text{ A} = \sqrt{\left(\frac{m \pm y - n.m - y \pm n}{4ny}\right)}$

$= \frac{\sqrt{(m \ldots\ldots \pm n)}}{2(\sqrt{ny})}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m \ldots\ldots \pm n}{ny}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos A}}{2}\right)}$

Mit Worten: Der halbe Sinus iſt, der halbirten Qu. Wurzel-Gröſe aus

$\frac{(m \pm y - n).(m - y \pm n)}{ny}$ gleich. Dem hal-

ben

ben ſteht der ganze Sinus entgegen; der halbe läßt ſich aber auch als einfacher, und der Ganze dagegen als doppelter Sinus betrachten; die Gröſe, (quantitas extenſi) bleibt; blos die Subſumtion unter die Categorien (der Vielheit und Allheit) wechſelt.

Eben ſo gehts mit dem Werth für

$2 + \mathrm{Cos}A = 2\left(\mathrm{Cos}\frac{1}{2}A\right)^2$. Man ſubſtituirt auch da $= \frac{(y + n + m)(y + n - m)}{2ny}$;

folglich iſt, die Helfte, von dieſen drei Aequivalenten:

$$\frac{1+\mathrm{Cos}A}{2} = \left(\mathrm{Cos}\frac{1}{2}A^2\right) = \frac{(y+n+m).(y+n-m)}{4ny};$$

und alſo:

$$\sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{Cos}A}{2}\right)} = \mathrm{Cos}\frac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(y+n+m).(y+n-m)}}{2\sqrt{(ny)}},$$

d. h. $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(y+n+m).(y+n-m)}}{ny}$, oder die Helfte dieſer Wurzel-Gröſe iſt der Werth des halben Coſinus.

Das ſind ſo natürliche Folgerungen, daß der gemeine Menſchen Verſtand, wenn er nur einige Minuten auf dem Gehalt von $2(\mathrm{Sin}.\frac{1}{2}A)^2$

verweilt, und die simpelste Schritte regressiv macht, darauf verfallen mus.

§. 17.

Man wird bei vielen Mathematikern die (lange) Hauptformel für den Sinus, (die S. 188 129 steht,) etwas anders gebildet finden; desgleichen auch die für den Sinus Versus. Damit dieß nicht befremde, bedenke man folgendes: In der einen Formel für den Siu. V. kommt die Potenz $(y-n)^2$ vor; für dieselbe läst sich auch $(n-y)^2$ sezen; das Resultat ist ganz im Werth das nehmliche, (nur die Stellung verändert sich:) $= nn - 2ny + yy$. Schreibt man nun den Werth für $1 - \text{Cos}$ statt: $\frac{mm-(y-n)^2}{2ny}$, jezt $\frac{mm-(n-y)^2}{2yn}$, so folgt auch das nächst daran stehende Aequivalent nun so evolvirt:

$= \frac{m+n-y).(m-n+y)}{2ny}$ auch, so viel als

$\frac{(m+n-y).(m+y-n)}{2ny}$ für den Werth des S.. V. Dieser lezte Ausdruck, in welchem man blos ein Spiel der Stellung bemerken wird, veranlaßt dann für die Schluß-Gleichung zum

Si-

Sinus ſelbſt notwendig die Formel:

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+n-m)(n+m-y)(m+y-n)}}{2ny}$$

wo man erſt wahrnimmt, daß dieſes Spiel gar nicht verächtlich oder unwichtig ſei; ſondern daß vielmehr eine bewundernswürdige Ordnung wol in die ganze äuſerliche Formel, als in den Calkül dadurch zugleich komme. — Ich möchte wol Menanders goldnen Spruch hierauf anwenden:

ὡς μεγα το μικρον εστιν, εν καιρω δοθεν.

Dieſe kleine Umdrehung verhilft jezt dem Verſtand zu der etwa ſo überſezbaren Gedankenreihe: Um den Sinus eines Winkel zu erhalten, addire (I) die 3 Seiten-Grösen des △(y+n+m). Addire (II) je zwo Seiten, y+n, n+m, m+y. Ziehe (III) von jeder dieſer 3 Summen die Grösſe der übrigen dritten Seite ab. Das giebt drei bejahte Reſte: y+n—m, n+m—y, m+y—n. Nun bilde (IV) ein Product aus den Grösen der nr. I. und III. Ziehe (V) daraus die Qu. W. dividire ſie (VI) durch das doppelte Product der 2 Seiten, die den Winkel, A, einſchlieſen; (2 ny). Der Quotient iſt der geſuchte Sinus für den Radius, der = 1 iſt.

Alle dieſe Acte giebt die bloſe Stellung der lezten neugeordneten Formel an. Aus der erſtern (§. 15. S. 128) für ſich war dieſes äuſerſt intereſſante Verfaren durchaus nicht zu deduciren; Die neue aber wird Schöpferin der erläuterten Gedanken-Reihe ſelbſt. — Dabei fällt mir ein Wort von Hr. Pr. Kant ein, welches auch ſein Hr. Recenſ. in d. A. L. Z. ſehr herausgehoben hat; „Eine neue und „richtige Formel, (die das, was zu tun iſt, um eine „Aufgabe zu befolgen, genau beſtimt, und nicht verfehlen läst,) iſt etwas ſehr wichtiges ..... Alle „unſre wiſſenſch. Bemühungen ſind weiter nichts, als „Aufſuchen von Formeln!“ — Ich getraute mir, als ein groſes Beiſpiel und Beleg hiezu, Newtons herrliche Erfindung des binomiſchen Lehrſazes ſelbſt desfalls anzuführen, und mit Hinſicht auf dieſe Zeilen, und das vorhergehende Blat überhaupt, zu beleuchten, und getraute mir, auf dem Verfolg dieſes Gangs oder Wegs, Seiten daran aufzudecken, die noch nicht aufgedeckt ſind. — Aber der Ort iſt hier nicht dazu, — vielleicht anderwärts, und zu andrer Zeit... Ich gebe zum Schluß blos noch die nachſtſtehende Folgerungen:

§. 18.

Man erhält die Gröſe des Perpendikels, CD, für ſich, (nicht als Gröſe des Sinus,) vermittelſt kurzer Erwägungen, wie da folgen: Durch Mlteation der äuſ. Glieder wurde CD. 1 = y. Sin A; nach nr. III. §. 16; Da war CD alſo Product. Das groſe Aequiv. für Sin A kennen wir aus dem Schluß des §. 15. Sezt man nun y würklich als Factor (oberhalb des Bruchſtrichs) dem langen Zäler bei, ſo hebt ſich dadurch das im Nenner befindliche y eo ipſo, u. man erhält die Gleichung für die Gröſe des Perpendikels allein;

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+n-m)(n+m-y)(m+y-n)}}{2n}$$

womit dann auch die Höhe des △ ſelbſt aus den Seiten, als gleichartige Zalgröſe eruirt iſt.

Gleichergeſtalt erhält man die Gröſe des Segments der Grund-Linie AD für ſich. Nehmlich als Coſinus', der an dem W. A liegt, war AD = y. Cos A; Sezt man nun y wirklich, als Factor, zu dem gefundnen Werth für Cos A, neben den Zäler; ſo wird

$$\frac{yy+nn-mm.y}{2ny} = \frac{yy+nn-mm}{2n} = AD$$

Endlich ergiebt sich auch dann äuserst leicht hieraus der Inhalt des Dreiecks selbst (area △ ABC,) so: Die Helfte der Grundlinie, mit dem Perpendikel (oder der Höhe) multiplicirt, hier $\frac{n}{2}$ mult. mit CD, als bereits auscalkulirte Zal-Grösen, stellen (bekannten Säzen gemäs,) das Product dar:

Area $\triangle = \frac{1}{2}$ AB. CD, so viel als: $=$

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{\sqrt{(y+n+m)(y+\ldots).(\ldots)(m+y-n)}}{2n},$$

oder, welches gleichviel ist, da sich n hebt; $=$

$$\frac{\sqrt{(y+n+m)(y+\ldots).(\ldots)(m+y-n)}}{4};$$

Mit Worten: Ein Viertel dieser Wurzel-Grösse ist der Inhalt des Dreiecks selbst; also auch auszudrücken, als:

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(y+n+m)(y+n-m).(n+m-y)(m+y-n)}.$$

Räsonnement

zu §. 18.

Ich fühlte Versuchung, dieses lezte Resultat ein sehr schönes Phänomen zu nennen, wenn man diesen Ausdruck nicht längst aus den Regionen

einer

einer Scienz ganz verwieſen hätte, in welcher alles ſtreng bewieſen, und nichts für dunkle Empfindung, für Bewunderung, oder unerklärliche Rürungen der Sinnlichkeit (ammaaslich) übrig gelaſſen wird! Was notwendig, feſtfixirt, und demonſtrativ-gewiß iſt, das ſoll man nicht anſtaunen! Aber bei der erſten Bekanntſchaft mit vielen groſen Säzen der Mathematik, iſts doch menſchlich, manchmal Ausnamen von dieſem axiomatiſchen Verbot zu machen, und zu zugeſtehen. Johnſon ſagt irgendwo: Things neceſſary and certain often ſurprize us, like unexpected Contingencies! Das iſt ein ſehr wahres Wort, und ein Wort, das von gar ächter Menſchenkenntniß zeugt. Die Anwendbarkeit deſſelben für meinen Saz iſt einleuchtend. Nicht nur die Formel hat eine gewiſſe anziehende Eleganz, (das was die Lateiner concinnum nennten,) ſondern auch der Gedanke, den Inhalt eines jeden Dreiecks, es ſei ſo ungleichſeitig, als es wolle, mittelſt dieſer 4 Producte, die in ſo gefälliger Ordnung aneinandergereiht ſtehen, überſehen zu können, ohne ſich um das Maas auch nur eines Winkels in der Area bekümmern zu dürfen, dieſer Gedanke

hat wirklich etwas unbeschreiblich-reizendes, ... welches ihm, meines Erachtens, auch die subtilste Zergliederung niemals nehmen wird. —

Auf welche Art sich die Säze des lezten §. auch aus Euklids Elemente herleiten lassen, hat Hr. Prof. Pfleiderer zu Tübingen sehr vortreflich in einer (mir eben erst zu Gesicht gekommenen) Dissertation gezeigt, welche die Aufschrift hat: Analysis triangul. rectilin. (1784); Ich verweise diejenige meiner Leser darauf, welche auch bei einigen meiner obigen Sphen nach tieferer Belehrung begierig sind.

Nähere Anwendung für den praktischen Geometer erfordert übrigens auch Kenntnis der Tangenten Lehre, welche ich in diesen Blättern geflissentlich nicht berührt habe.

Anhang.

Ehe ich schliese, erlaube ich mir, mit Rück-Erinnerung an eine Stelle im Räs. zu §. 8. (oben S. 101), noch die Beischliessung folg. Sphens.

§. 19.

Wenn man das Verh. der Zehneck-Seite zum Rad. auf die bekannte Weise ausgespäht hat

hat, so lassen sich sehr leicht verschiedene Probleme auflösen, bei deren Vortrag für sich niemand an die Zeichnung und Gröse des X Ecks im Kreiß denken dürfte. Man fragt zum Beispiel: (I) Wie läst sich eine gerade Linie, af, dergestatt in einem ihrer Puncte, b, abtheilen, daß sie (die ganze Linie,) zu dem gröfsern Segment, oder Stück, ab, sich verhalte, wie dies. gröf. Stück zu dem restirenden kleinern Stück, (bf)? S. 96. Fig. II. Der Gedanke ist also der: Das gröf. Stück, ab, soll die Mittelprop. Lin. seyn, zwischen der ganzen Linie, af, und dem kleinern Stück, bf; oder, af : ab = ab : bf, heist es wesentlich in der Forderung. — (II) Oder man fragt: Wie wird wol eine Linie, af, in zwei Segmente so getheilt, daß das Qu. des gröfsern Segments, ab, dem Rectangel gleich wäre, welches aus der ganzen Linie, in Verbindung mit dem kleinern Segment, (rechtwinklicht zusammengestellt, af ⨯ fb, oder af ⨯ fd,) Fig. 16. construirt würde? *) Die

*) Newtons Ausdruck hierüber (Arithm. vniv. Sect. IV. § I.) war mir lange unverständlich: Quadratum maximæ partis sit æquale rectangulo sub tota & minore parte

Die Anworten sind Folgende:

ad Qu. (I) Die gegebene Linie sei, af, was Fig. 11. S. 96. synthetisch da stand, als ab + bf, oder = x + $\frac{1}{2}$ r; Mit einer Signatur heise diese Linie, M; folglich das kleine Segment allein: M — x = $\frac{1}{2}$ r = af — ab.

Der Hypothesis nach, mus die Proport. statt haben: x + $\frac{1}{2}$ r : x = x : $\frac{1}{2}$ r.

oder: M : x = x : M — x.

Die Mittel-Prop. ist xx = MM — x, oder MM — Mx = x²; also auch, MM = x² + Mx. Siehe da aber die nehmliche quadratische Gleichung ganz, wie oben S. 93. nr. II; also auch die Erforderniß derselbigen Auflösung! wodurch dann x = $\sqrt{\frac{5}{4}}$ M² — $\frac{1}{2}$ M werden mus. Aber last uns wol bedenken, daß M nichts als der Radius des grösern Kreises,

af

---

parte contento. — Endlich schlug ich Euclid. El. L. II. Pr. XI auf, und fand, daß es die Sprache des lat. Uebersezers sei. — ορθογωνιον υπο της ολης . . . περιεχομενον war mir dann, mittelst Ansicht der dortigen Figur, sehr leicht verständlich.

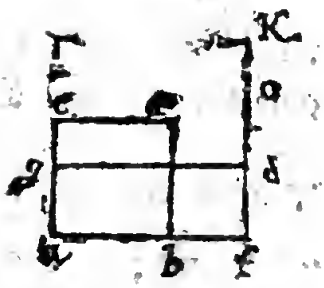
af = kf = x + $\frac{1}{2}$ r ist; demnach als Zal-Grösse immer doch nicht mehr, als r = 1. Folglich müssen wir schlechterdings ganz auf die nehmliche Gleichung, wie oben S. 94 — 97. hinauskommen: x = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ r, auf welche wir durch Quadrirung der Grösse, x + $\frac{1}{2}$ r, und deren Aequivalents, gelangt waren; dann M läst sich notwendig, ganz wie dort r, behandeln . . . . . Also ist das gesuchte Stück x, oder ab, damit hinlänglich ausgeforscht, und als die verlangte Mittel-Prop. bestimmt erurt. Die Seite des X Ecks ist ebendieselbe. Ihre Gränze giebt den Punct der Theilung, daher selbst an.

ad Qu II. Die Grund-Linie auch in der nebenst. Figur bleibt,

ab + bf = M = x + $\frac{1}{2}$ r.

Das Qu. des grösern Segments ist

Fig. 16.



(ab)² = xx, hier, abcc. Das Rectangel, afgd, ist (der Construction gemäs, da bf = df = M — x, sind,) = af × bf, oder af × df oder = M.M — x.

Allen

Allen Rechtecken correspondiren ja bekanntlich solche zween Factoren die gebildet werden, in so ferne man auf den 2 rechtwinklicht zusammengestellten Linien, (der Höhe und Basis) gleichartige Theilchen zählt, und mit einand. multiplicirt. Das Product, M. M — x, aber haben wir aus der obigen Proportion überzeugend, als = xx, als das Qu. der Zehneck Seite kennen lernen. Da beginnt also abermals der Calkül völlig, wie S. 148 und die quadratische Gleichung erhält notw. dieselbige Auflösung; x wird die Helfte von $\sqrt{5 - 1}$ M; wo dann für M wiederum r zu denken ist. Die Antwort auf die IIte Frage ist demnach, wie ad I. Der Einschnitt zu Marklrung des gröfern Segments ist die Gränze der Zehneck-Seite, ab . . . . Was übrigens den Ideenlauf hiebei einigermasen schwer macht, ist die dopplte Beziehung von bf, welches Einmal, als die Helfte des Radius im kleinern Kreis, als $\frac{1}{2}$ r, in Fig. 11. vorkommt; (eines Radius, der in Fig. 16 weder im Rechteck, noch im Qu. xx, mehr ersichtlich ist,) zweitens aber auch als kleineres Fragment des Rad. af = kf = gd, welcher

cher der Radius eines gröſern Kreiſes iſt. Dieſer Unterſchied iſt in der lezten Fig. auf der Seiten-Linie, angedeutet; Da iſt ſo, was (der kleinere Radius,) Fig. 11, bk = 2 bf, iſt.

Last uns zum lezten mal zurück ſehen! Die gemachte Entdeckung iſt ſehr ſchön. Für unzählige Linien u. Diameter iſt damit das gröſere Segment beſtimmt, und zugleich als Mittelproportionale, zugl. als X Eck Seite für einen gewiſſen Kreis anerkennbar. Eine Eigenſchaft giebt die Probe der andern. Dieſe Einſicht freut, und erhebt uns billig, gleich als ein groſer Blick in die Geheimniſſe der ewigen Natur, der tauſenden verſagt iſt. Johnſons Stelle fällt mir wieder hier ein,— aber noch mehr Sulzers Beleuchtung (S. 32. in ſ. verm. phil. Schriften) einiger geom. Fälle, in ſo ferne ſie hohe intellectuelle Vergnügung gewähren. Unſre Säze da ſind der anpaſſendſte Pendant zu denen, über die er diſſerirt. Unüberſehliche Mannichfaltigkeit auf Einheit, auf ein Geſez, auf eine Probe reducirt, iſt weſentlicher Charakter ihrer Eigenheit.

Um

Um die Figuren immer schnell wieder finden zu können, füge ich folgenden Anzeiger noch bei:

Fig. 1	steht S. 1.	Fig 9	steht S. 61.
Fig. 2	— S. 2.	Fig. 10	— S. 88.
Fig. 3	— S. 6.	Fig. 11	— S. 96.
Fig. 4	— S. 11.	Fig. 12	— S. 110.
Fig. 5	— S. 23.	Fig. 13	— S. 118.
Fig. 6	— S. 37.	Fig. 14	— S. 123.
Fig. 7	— S. 38.	Fig. 15	— S. 132.
Fig. 8	— S. 45.	Fig. 16	— S. 149.

Druckfehler.

S. 40. lin. 5. statt $\sqrt{\frac{2}{2}}$ lies: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

S. 93. lin. 12. statt x r² lies: x r

S. 105. lin. 13. seze das = vor den Bruchstrich.

Ao1 1462110